Subiectul II.1

Determinanți și sisteme liniare — rezolvare pas cu pas

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro
Acest material este pus la dispoziție sub Licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

Enunț

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 3 & a\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x+ay+az=1\\ ax+3y+az=0\\ 2y+z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $\det\big(A(1)\big)=2$.

5p b) Arătați că, pentru orice număr real a, sistemul de ecuații are soluție unică.

5p c) Determinați numărul natural nenul a pentru care sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0), cu $z_0=nx_0$, unde n este număr natural.

Observație. Matricea coeficienților sistemului este exact $A(a)$: coeficienții lui x sunt $1,\ a,\ 0$ (coloana 1), ai lui y sunt $a,\ 3,\ 2$ (coloana 2), iar ai lui z sunt $a,\ a,\ 1$ (coloana 3).

a) Arătați că $\det\big(A(1)\big)=2$

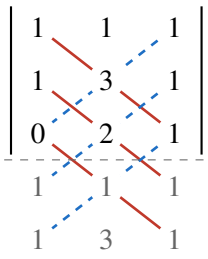
Pasul 1. Înlocuim $a=1$. Peste tot unde apare a scriem 1:

$$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Pasul 2. Calculăm determinantul. Prezentăm trei metode; oricare este acceptată la examen.

Metoda 1 – Regula lui Sarrus.

1. Sub determinant rescriem linia 1 și apoi linia 2; obținem un tabel cu 5 linii.
2. Diagonalele „în jos spre dreapta” (linie continuă) dau produse care se adună (semnul $+$).
3. Diagonalele „în jos spre stânga” (linie întreruptă) dau produse care se scad (semnul $-$).

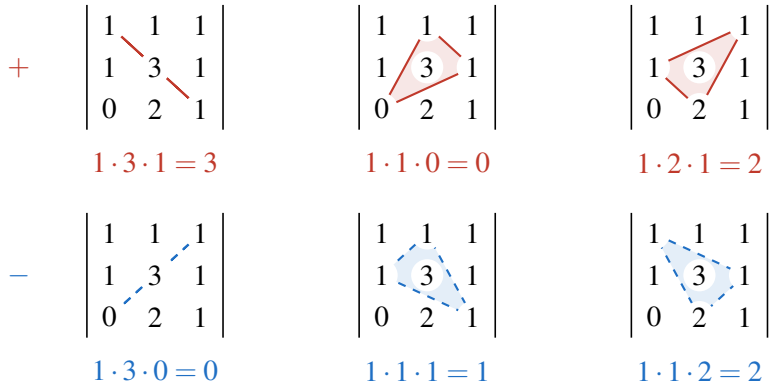


$+\,1\cdot3\cdot1=3$
$+\,1\cdot2\cdot1=2$
$+\,0\cdot1\cdot1=0$
$-\,1\cdot3\cdot0=0$
$-\,1\cdot2\cdot1=2$
$-\,1\cdot1\cdot1=1$

$$\det A(1)=(3+2+0)-(0+2+1)=5-3=2.$$

Metoda 2 – Regula triunghiului.

1. Termenii cu $+$: diagonala principală și cele două triunghiuri care au o latură paralelă cu ea.
2. Termenii cu $-$: diagonala secundară și cele două triunghiuri care au o latură paralelă cu ea.



$$\det A(1) = (3+0+2) - (0+1+2) = 5-3 = 2.$$

Metoda 3 – Dezvoltarea după o coloană.

1. Alegem linia sau coloana cu cele mai multe zerouri. Coloana 1 conține $1,1,0$, deci un termen dispare.
2. Semnul elementului de pe linia i și coloana j este $(-1)^{i+j}$; pe coloana 1 semnele sunt $+$, $-$, $+$.
3. Minorul unui element se obține tăind linia și coloana elementului; rămâne un determinant de ordinul 2, care se calculează astfel: $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - qr$.

$$\det A(1) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3-2) - 1 \cdot (1-2) + 0 = 1 + 1 = 2.$$

b) Arătați că sistemul are soluție unică pentru orice $a \in \mathbb{R}$

Ideea. Un sistem cu 3 ecuații și 3 necunoscute are soluție unică exact atunci când determinantul sistemului este nenul (sistem de tip Cramer).

Pasul 1. Calculăm $\Delta = \det A(a)$, dezvoltând după coloana 1 (elementele 1, a, 0):

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} a & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 = (3-2a) - a(a-2a) = 3 - 2a + a^2, \quad \text{deci} \quad \Delta = a^2 - 2a + 3.$$

Pasul 2. Arătăm că $\Delta \neq 0$. Formăm un pătrat perfect:

$$a^2 - 2a + 3 = (a^2 - 2a + 1) + 2 = (a-1)^2 + 2.$$

Cum $(a-1)^2 \geq 0$, avem $\Delta \geq 2 > 0$ pentru orice a real.

Concluzie: $\Delta \neq 0$, deci sistemul este de tip Cramer și are soluție unică pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Pasul 3. Aflăm soluția cu regula lui Cramer: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$. Determinanții Δ_x, Δ_y, Δ_z se obțin din Δ înlocuind coloana necunoscutei cu coloana termenilor liberi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; fiecare îl dezvoltăm după linia sau coloana cu cele mai multe zerouri.

- Δ_x (înlocuim coloana 1; coloana 1 devine $1,0,0$ și are două zerouri):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2a.$$

- Δ_y (înlocuim coloana 2; linia 3 devine $0,0,1$ și are două zerouri; elementul 1 este pe poziția $(3,3)$, semn $(-1)^{3+3} = +$):

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} = 0 - a = -a.$$

- Δ_z (înlocuim coloana 3; coloana 3 devine $1,0,0$ și are două zerouri; elementul 1 este pe poziția $(1,3)$, semn $(-1)^{1+3}=+$):

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 3 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=+1\cdot\begin{vmatrix}a & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2a-0=2a.$$

Soluția unică este:

$$x_0=\frac{3-2a}{a^2-2a+3},\qquad y_0=\frac{-a}{a^2-2a+3},\qquad z_0=\frac{2a}{a^2-2a+3}.$$

Verificare (de exemplu pentru $a=1$): $x_0=\frac{1}{2}$, $y_0=-\frac{1}{2}$, $z_0=1$. Înlocuim în sistem: $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=1$; $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1=0$; $-1+1=0$. Toate ecuațiile sunt verificate.

c) Determinați $a\in\mathbb{N}^*$ pentru care $z_0=nx_0$, cu $n\in\mathbb{N}$

Pasul 1. Scriem condiția folosind soluția de la b). Fracțiile au același numitor $\Delta\neq 0$:

$$\frac{2a}{\Delta}=n\cdot\frac{3-2a}{\Delta}\implies 2a=n(3-2a).$$

Pasul 2. Analizăm semnele.

- a este natural nenul, deci $a\geq 1$ și $2a>0$: membrul stâng este pozitiv.
- Atunci și membrul drept trebuie să fie pozitiv: $n(3-2a)>0$. Cum $n\geq 0$, trebuie ca $n\geq 1$ și $3-2a>0$.
- Din $3-2a>0$ obținem $a<\frac{3}{2}$, iar singurul număr natural nenul cu această proprietate este $a=1$.

Pasul 3. Verificăm $a=1$**.** Obținem $2\cdot 1=n(3-2)$, deci $n=2\in\mathbb{N}$. Soluția este $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$ și $z_0=1=2\cdot\frac{1}{2}=2x_0$.

Altă variantă (divizibilitate). Din $2a=n(3-2a)$ rezultă $n=\dfrac{2a}{3-2a}$. Pentru $a\geq 2$ numitorul este negativ, deci $n<0$, imposibil pentru $n\in\mathbb{N}$; pentru $a=1$ obținem $n=2$.

De ce se cere a **nenul?** Pentru $a=0$ am avea $0=3n$, deci $n=0$, iar condiția ar fi verificată banal.

Răspuns: a) $\det A(1)=2$; b) $\Delta=(a-1)^2+2\neq 0$, soluție unică; c) $a=1$.