

Observație – Teorema lui Arhimede

În matematică, atunci când vorbim despre Arhimede, în contextul numerelor reale, ne referim la Axioma lui Arhimede (sau Proprietatea lui Arhimede). Aceasta este o teoremă fundamentală de structură și ordine din analiza matematică (studiată de obicei în clasa a XI-a la capitolul privind mulțimea numerelor reale).

Ce afirmă Axioma lui Arhimede?

Dacă avem două numere reale strict pozitive, $\alpha > 0$ și $\beta > 0$, oricât de mic ar fi α și oricât de mare ar fi β , există întotdeauna un număr natural $n \in \mathbb{N}$ astfel încât: $n \cdot \alpha > \beta$

Pe înțelesul tuturor: Proprietatea ne spune că mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este nemărginită superior. Oricât de mare ar fi un număr β , dacă adunăm un număr pozitiv α cu el însuși de suficiente ori (n ori), rezultatul va depăși în cele din urmă numărul β . În consecință, nu există un număr real „infiniț de mare” în interiorul sistemului standard de numere reale.

Consecințe importante folosite în exerciții

Din această axiomă derivă câteva proprietăți extrem de utile pentru demonstrații și limite:

1. **Pentru numere foarte mici:** Dacă alegem $\beta = 1$, teorema ne spune că pentru orice număr real pozitiv $\alpha > 0$, există un număr natural n astfel încât $n \cdot \alpha > 1$, adică: $\frac{1}{n} < \alpha$

(Oricât de mic este un număr pozitiv, există întotdeauna o fracție de forma $\frac{1}{n}$ și mai mică decât el).

2. **Partea întreagă:** Datorită acestei proprietăți se poate demonstra matematic existența părții întregi a oricărui număr real. Pentru orice număr real x , există un număr întreg unic k astfel încât:

$$k \leq x < k + 1.$$

În contextul matematicii moderne, este corect să o numim în ambele moduri, dar cel mai precis este considerată o teoremă, deoarece în structura actuală a analizei matematice ea se demonstrează. Iată care este diferența și de ce există această dublă denumire:

1. De ce se numește istoric „Axiomă”?

Numele de „Axioma lui Arhimede” provine din antichitate și din lucrările matematicianului David Hilbert (care a reconstruit bazele geometriei). Pe atunci, ea a fost introdusă ca o regulă de bază (axiomă) acceptată fără demonstrație, pentru a defini modul în care măsurăm lungimile: oricât de mic ar fi un segment α , dacă îl pui cap la cap de suficiente ori, vei depăși orice segment β , oricât de lung.

2. De ce este de fapt o „Teoremă”?

Astăzi, când construim riguros mulțimea numerelor reale, noi nu o mai acceptăm ca pe o axiomă.

O considerăm o teoremă deoarece o putem demonstra logic folosind o altă proprietate mai profundă: Axioma de structură a lui Cantor-Dedekind (Axioma marginii superioare).

Demonstrația (pe scurt, prin reducere la absurd):

1. Presupunem prin absurd că proprietatea lui Arhimede ar fi falsă. Asta ar însemna că pentru un anumit $\alpha > 0$ și un anumit $\beta > 0$, produsul $n \cdot \alpha$ nu depășește niciodată pe β , adică $n \cdot \alpha \leq \beta$ pentru orice număr natural n .
2. Aceasta înseamnă că mulțimea $M = \{n \cdot \alpha \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită superior de β .
3. Conform Axiomei marginii superioare, mulțimea M trebuie să aibă o margine superioară unică, să o numim S .
4. De aici rezultă că $n \cdot \alpha \leq S$ pentru orice n . Dar dacă această relație e valabilă pentru orice număr natural, ea trebuie să fie valabilă și pentru următorul număr natural, adică $(n + 1) \cdot \alpha \leq S$.
5. Desfășurând paranteza, obținem $n \cdot \alpha + \alpha \leq S$, ceea ce înseamnă că $n \cdot \alpha \leq S - \alpha$.
6. Am ajuns la o contradicție: am găsit un număr mai mic decât S (și anume $S - \alpha$, deoarece $\alpha > 0$) care ar fi și el o margine superioară pentru mulțimea noastră.
7. Contradicția demonstrează că presupunerea noastră a fost falsă, deci mulțimea numerelor naturale este nemărginită, iar proprietatea lui Arhimede este adevărată.

Pe scurt: Poți folosi ambele denumiri în siguranță la școală sau la examene. Profesorii folosesc des termenul de "Axioma lui Arhimede" ca nume propriu istoric, deși din punct de vedere matematic strict, este o teoremă demonstrabilă.