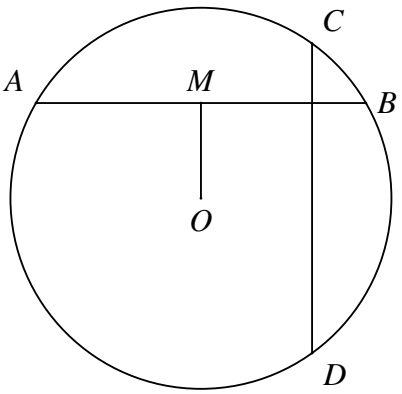
Problema 1 – Geometrie plană
Evaluarea Națională matematică, Sesiunea 2026, Examen

Enunț

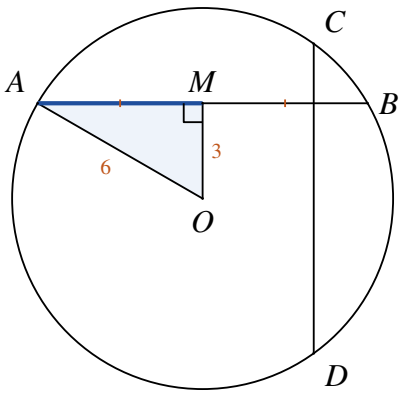


În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și raza de 6 cm. Punctele A, B, C și D aparțin cercului, astfel încât dreptele AB și CD sunt perpendiculare. Punctul M este mijlocul coardei AB și $OM = 3$ cm.

a) Arată că $AM = 3\sqrt{3}$ cm.

b) Demonstrează că $AC^2 + BD^2 = 144$ cm^2.

Rezolvare a)



Ipoteză: cercul de centru O și raza 6 cm; A, B pe cerc; M mijlocul coardei AB; $OM = 3$ cm.
Concluzie: $AM = 3\sqrt{3}$ cm.

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Arătăm că $OM \perp AB$.

Punctele A și B aparțin cercului, deci $OA = OB = 6$ cm (raze), iar triunghiul AOB este isoscel. Segmentul OM este mediana corespunzătoare bazei AB.

Teoremă. Într-un triunghi isoscel, mediana corespunzătoare bazei este și înălțime.

Prin urmare $OM \perp AB$, adică $\sphericalangle OMA = 90^\circ$.

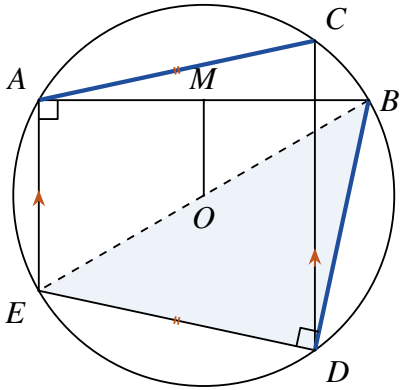
Pasul 2. Calculăm AM.

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul OMA, dreptunghic în M:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow AM = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Concluzie. $AM = 3\sqrt{3}$ cm. ■

Rezolvare b) – Metoda 1 (ca în barem)



Ipoteză: cercul de centru O și raza 6 cm; A, B, C, D pe cerc; $AB \perp CD$; M mijlocul coardei AB; $OM = 3$ cm.
Concluzie: $AC^2 + BD^2 = 144$ cm^2.

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Punctul diametral opus lui B.

Fie E punctul diametral opus lui B; atunci BE este diametru, deci $BE = 2 \cdot 6 = 12$ cm. Unghiurile BAE și BDE sunt înscrise în cerc și subîntind diametrul BE.

Teoremă. Un unghi înscris într-un semicerc este unghi drept.

Prin urmare $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BDE = 90^\circ$.

Pasul 2. Arătăm că $AE \parallel CD$.

Din $\sphericalangle BAE = 90^\circ$ rezultă $AE \perp AB$. Din ipoteză, $CD \perp AB$. Două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele, deci $AE \parallel CD$.

Pasul 3. Arătăm că $AC = DE$.

Patrulaterul $ACDE$ are vârfurile pe cerc și $AE \parallel CD$, deci este un trapez înscris în cerc.

Teoremă. Un trapez înscris într-un cerc este isoscel.

Prin urmare laturile neparalele sunt congruente: $AC = DE$.

Pasul 4. Concluzia.

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul BDE, dreptunghic în D:

$$DE^2 + BD^2 = BE^2 = 144 \;\Rightarrow\; AC^2 + BD^2 = 144 \text{ cm}^2. \blacksquare$$