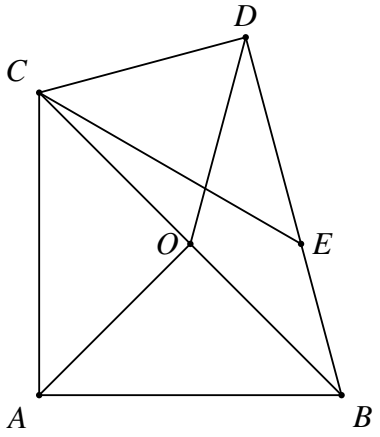
Problema 1 – Geometrie plană
Evaluarea Națională matematică, Sesiunea 2026, Rezervă examen

Enunț

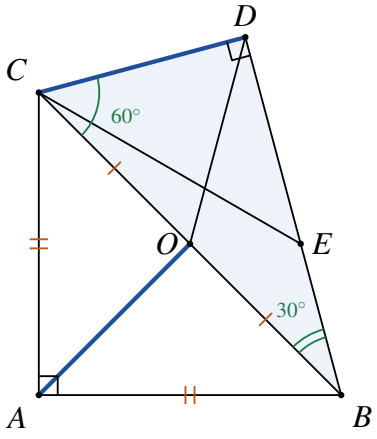
În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic isoscel ABC, cu $AB = AC$. Punctul O este mijlocul laturii BC, iar punctele A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC, astfel încât $\sphericalangle BDC = 90^\circ$ și $\sphericalangle BCD = 60^\circ$.



a) Demonstrează că $AO = CD$.

b) Arată că $AB = CE$, unde punctul E aparține segmentului BD, astfel încât $\sphericalangle BCE = 15^\circ$.

a) Rezolvare completă



Ipoteză: $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$; O mijlocul lui BC; $\sphericalangle BDC = 90^\circ$, $\sphericalangle BCD = 60^\circ$.
Concluzie: $AO = CD$.

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Calculăm AO în funcție de BC.

Triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci BC este ipotenuza sa. Deoarece O este mijlocul laturii BC, segmentul AO este mediana corespunzătoare ipotenuzei.

Teoremă. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Prin urmare,

$$AO = \frac{BC}{2}. \tag{1}$$

Pasul 2. Determinăm măsura unghiului DBC.

În triunghiul BDC cunoaștem $\sphericalangle BDC = 90^\circ$ și $\sphericalangle BCD = 60^\circ$. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, deci

$$\sphericalangle DBC = 180^\circ - \sphericalangle BDC - \sphericalangle BCD = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Pasul 3. Calculăm CD în funcție de BC.

Triunghiul BDC este dreptunghic în D, cu ipotenuza BC. Cateta CD se opune unghiului DBC, care are măsura de 30°.

Teorema unghiului de 30°. Într-un triunghi dreptunghic, cateta care se opune unghiului de 30° are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Prin urmare,

$$CD = \frac{BC}{2}. \tag{2}$$

Pasul 4. Concluzia.

Din relațiile (1) și (2) obținem

$$AO = \frac{BC}{2} = CD,$$

deci $AO = CD$. ■