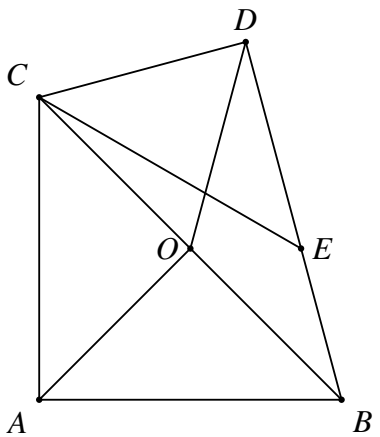
Problema 1 – Geometrie plană
Evaluarea Națională matematică, Sesiunea 2026, Rezervă examen

Enunț

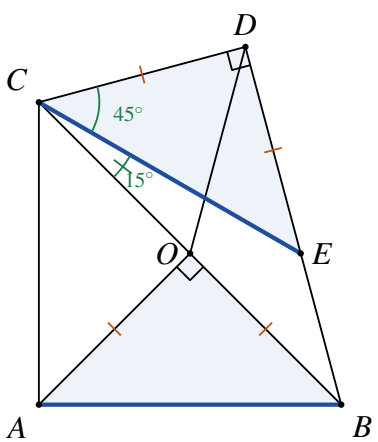
În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic isoscel ABC, cu $AB = AC$. Punctul O este mijlocul laturii BC, iar punctele A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC, astfel încât $\sphericalangle BDC = 90^\circ$ și $\sphericalangle BCD = 60^\circ$.



a) Demonstrează că $AO = CD$.

b) Arată că $AB = CE$, unde punctul E aparține segmentului BD, astfel încât $\sphericalangle BCE = 15^\circ$.

b) Rezolvare completă – Metoda 1 (ca în barem)



Ipoteză: $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$; O mijlocul lui BC; $\sphericalangle BDC = 90^\circ$, $\sphericalangle BCD = 60^\circ$; $E \in BD$, $\sphericalangle BCE = 15^\circ$.
Concluzie: $AB = CE$.

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Triunghiul AOB este dreptunghic isoscel.

În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), mediana AO corespunzătoare bazei BC este și înălțime, deci $AO \perp BC$ și $\sphericalangle AOB = 90^\circ$. Din punctul a), $AO = \dfrac{BC}{2} = OB$. Prin urmare, triunghiul AOB este dreptunghic isoscel, cu catetele

$$AO = OB = \frac{BC}{2}. \tag{1}$$

Pasul 2. Triunghiul CDE este dreptunghic isoscel.

Punctul E aparține segmentului BD, deci semidreapta CE este situată în interiorul unghiului BCD și

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCE = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

Triunghiul CDE este dreptunghic în D ($E \in BD$, $\sphericalangle CDB = 90^\circ$), deci $\sphericalangle DEC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Rezultă că triunghiul CDE este dreptunghic isoscel, cu catetele

$$CD = DE. \tag{2}$$

Pasul 3. Comparăm triunghiurile AOB și CDE.

Din punctul a), $CD = AO$. Folosind relațiile (1) și (2), obținem

$$AO = OB = CD = DE.$$

Triunghiurile AOB și CDE au:

- $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CDE$ (ambele au măsura de 90°);
- $AO \equiv CD$;
- $OB \equiv DE$.

Conform cazului de congruență C.C. (catetă–catetă), $\triangle AOB \equiv \triangle CDE$.

Pasul 4. Concluzia.

Din congruența triunghiurilor rezultă congruența ipotenuzelor: $AB = CE$. ■

Observație. Această rezolvare urmează baremul oficial și nu necesită teorema lui Pitagora.