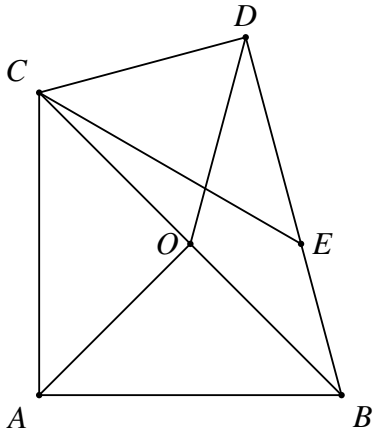
Problema 1 – Geometrie plană
Evaluarea Națională matematică, Sesiunea 2026, Rezervă examen

Enunț

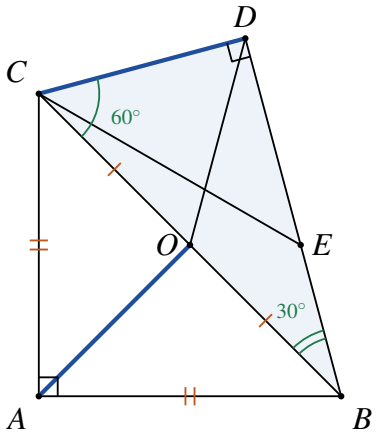
În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic isoscel ABC, cu $AB = AC$. Punctul O este mijlocul laturii BC, iar punctele A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC, astfel încât $\sphericalangle BDC = 90^\circ$ și $\sphericalangle BCD = 60^\circ$.



a) Demonstrează că $AO = CD$.

b) Arată că $AB = CE$, unde punctul E aparține segmentului BD, astfel încât $\sphericalangle BCE = 15^\circ$.

Rezolvare a)



Ipoteză: $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$; O mijlocul lui BC; $\sphericalangle BDC = 90^\circ$, $\sphericalangle BCD = 60^\circ$.
Concluzie: $AO = CD$.

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Calculăm AO în funcție de BC.

Triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci BC este ipotenuza sa. Deoarece O este mijlocul laturii BC, segmentul AO este mediana corespunzătoare ipotenuzei.

Teoremă. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Prin urmare,

$$AO = \frac{BC}{2}. \tag{1}$$

Pasul 2. Determinăm măsura unghiului DBC.

În triunghiul BDC cunoaștem $\sphericalangle BDC = 90^\circ$ și $\sphericalangle BCD = 60^\circ$. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°, deci

$$\sphericalangle DBC = 180^\circ - \sphericalangle BDC - \sphericalangle BCD = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Pasul 3. Calculăm CD în funcție de BC.

Triunghiul BDC este dreptunghic în D, cu ipotenuza BC. Cateta CD se opune unghiului DBC, care are măsura de 30°.

Teorema unghiului de 30°. Într-un triunghi dreptunghic, cateta care se opune unghiului de 30° are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Prin urmare,

$$CD = \frac{BC}{2}. \tag{2}$$

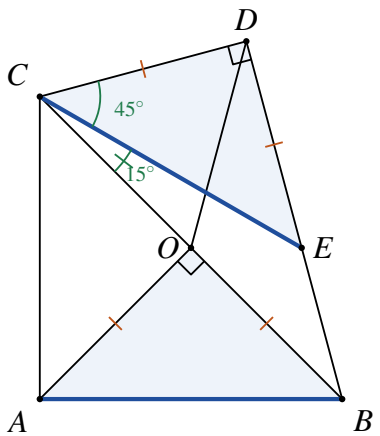
Pasul 4. Concluzia.

Din relațiile (1) și (2) obținem

$$AO = \frac{BC}{2} = CD,$$

deci $AO = CD$. ■

REZOLVARE b) – METODA 1 (CA ÎN BAREM)



Ipoteză: $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAC = 90°$, $AB = AC$; O mijlocul lui BC; $\sphericalangle BDC = 90°$, $\sphericalangle BCD = 60°$; $E \in BD$, $\sphericalangle BCE = 15°$.
Concluzie: $AB = CE$.

REZOLVARE DETALIATĂ

Pasul 1. Triunghiul *AOB* este dreptunghic isoscel.

În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), mediana AO corespunzătoare bazei BC este și înălțime, deci $AO \perp BC$ și $\sphericalangle AOB = 90°$. Din punctul a), $AO = \frac{BC}{2} = OB$. Prin urmare, triunghiul AOB este dreptunghic isoscel, cu catetele

$$AO = OB = \frac{BC}{2}. \tag{1}$$

Pasul 2. Triunghiul *CDE* este dreptunghic isoscel.

Punctul E aparține segmentului BD, deci semidreapta CE este situată în interiorul unghiului BCD și

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCE = 60° - 15° = 45°.$$

Triunghiul CDE este dreptunghic în D ($E \in BD$, $\sphericalangle CDB = 90°$), deci $\sphericalangle DEC = 90° - 45° = 45°$. Rezultă că triunghiul CDE este dreptunghic isoscel, cu catetele

$$CD = DE. \tag{2}$$

Pasul 3. Comparăm triunghiurile *AOB* și *CDE*.

Din punctul a), $CD = AO$. Folosind relațiile (1) și (2), obținem

$$AO = OB = CD = DE.$$

Triunghiurile AOB și CDE au:

- $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CDE$ (ambele au măsura de 90°);

- $AO \equiv CD$;
- $OB \equiv DE$.

Conform cazului de congruență C.C. (catetă–catetă), $\triangle AOB \equiv \triangle CDE$.

Pasul 4. Concluzia.

Din congruența triunghiurilor rezultă congruența ipotenuzelor: $AB = CE$. ■

Observație. Această rezolvare urmează baremul oficial și nu necesită teorema lui Pitagora.