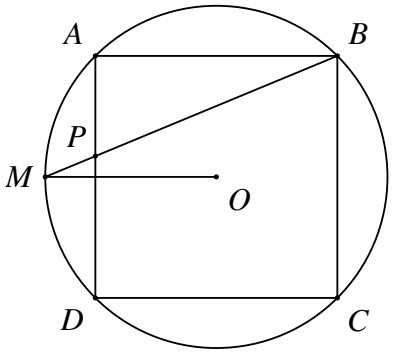
PB1_ENMATH2026_SIM1

Problema 1 – Geometrie plană
Evaluarea Națională matematică, Sesiunea 2026, Simulare 1

ENUNȚ

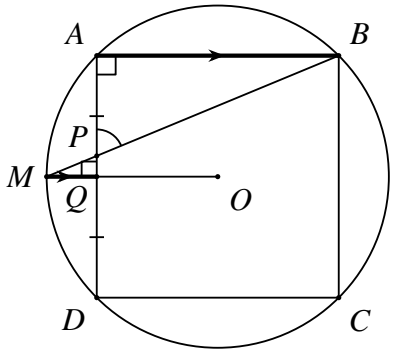
În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O. Punctele A, B, C și D aparțin cercului, astfel încât $ABCD$ este pătrat, cu $AB = 4$ cm. Punctul M este mijlocul arcului mic AD, iar dreptele AD și BM se intersectează în punctul P.



a) Arată că $MO = 2\sqrt{2}$ cm.

b) Demonstrează că tangenta unghiului BPA este egală cu $1+\sqrt{2}$.

b) REZOLVARE COMPLETĂ – METODA 1 (CA ÎN BAREM)



Ipoteză: $\mathscr{C}(O,r)$; $ABCD$ pătrat înscris în cerc, $AB = 4$ cm; M mijlocul arcului mic AD; $AD \cap BM = \{P\}$.
Concluzie: $\text{tg}(\sphericalangle BPA) = 1+\sqrt{2}$

REZOLVARE DETALIATĂ

Pasul 1. OQ **este înălțime și mediană în triunghiul** OAD**.**

Fie $OM \cap AD = \{Q\}$. Cum M este mijlocul arcului mic AD, unghiurile la centru AOM și MOD sunt congruente, deci OM este bisectoarea unghiului AOD. Triunghiul OAD este isoscel ($OA = OD$, raze), deci bisectoarea OQ este și înălțime și mediană:

$$OQ \perp AD, \qquad AQ = QD = \frac{AD}{2} = 2 \text{ cm}.$$

Pasul 2. Calculăm MQ**.**

O este mijlocul lui BD și Q este mijlocul lui AD, deci OQ este linie mijlocie în triunghiul ABD: $OQ = \dfrac{AB}{2} = 2$ cm. Atunci

$$MQ = MO - OQ = 2\sqrt{2} - 2 \text{ cm}.$$

Pasul 3. $\triangle MPQ \sim \triangle BPA$**.**

$MQ \perp AD$ și $BA \perp AD$, deci $MQ \parallel AB$. Conform teoremei fundamentale a asemănării, $\triangle MPQ \sim \triangle BPA$, deci

$$\frac{PQ}{PA} = \frac{MQ}{BA} = \frac{2\sqrt{2}-2}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Pasul 4. Calculăm PA**.**

Punctul P aparține segmentului AQ, deci $PQ+PA=AQ=2$ cm:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot PA+PA=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{2}\cdot PA=2 \Rightarrow PA=\frac{4}{\sqrt{2}+1}=4\left(\sqrt{2}-1\right) \text{ cm.}$$

Pasul 5. Tangenta unghiului BPA.
Triunghiul BAP este dreptunghic în A, deci

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle BPA)=\frac{AB}{PA}=\frac{4}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=1+\sqrt{2}.$$

Concluzie. $\operatorname{tg}(\sphericalangle BPA)=1+\sqrt{2}$. ■