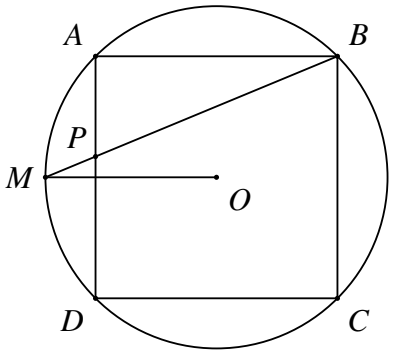
# Problema 1 – Geometrie plană
# Evaluarea Națională matematică, Sesiunea 2026, Simulare 1

## Enunț

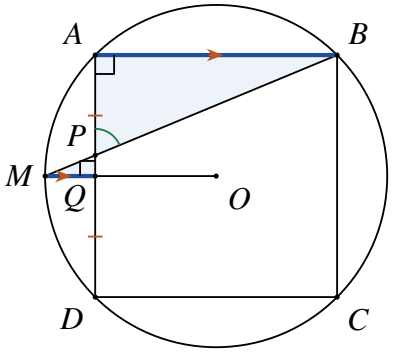
În figura alăturată este reprezentat cercul de centru $O$. Punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ aparțin cercului, astfel încât $ABCD$ este pătrat, cu $AB = 4$ cm. Punctul $M$ este mijlocul arcului mic $AD$, iar dreptele $AD$ și $BM$ se intersectează în punctul $P$.




**a)** Arată că $MO = 2\sqrt{2}$ cm.

**b)** Demonstrează că tangenta unghiului $BPA$ este egală cu $1+\sqrt{2}$.

## b) Rezolvare completă – Metoda 1 (ca în barem)




**Ipoteză:** $\mathscr{C}(O,r)$; $ABCD$ pătrat înscris în cerc, $AB = 4$ cm; $M$ mijlocul arcului mic $AD$; $AD \cap BM = \{P\}$.
**Concluzie:** $\operatorname{tg}(\sphericalangle BPA) = 1+\sqrt{2}$

## Rezolvare detaliată

**Pasul 1.** $OQ$ **este înălțime și mediană în triunghiul** $OAD$**.**

Fie $OM \cap AD = \{Q\}$. Cum $M$ este mijlocul arcului mic $AD$, unghiurile la centru $AOM$ și $MOD$ sunt congruente, deci $OM$ este bisectoarea unghiului $AOD$. Triunghiul $OAD$ este isoscel ($OA = OD$, raze), deci bisectoarea $OQ$ este și înălțime și mediană:

$$OQ \perp AD, \qquad AQ = QD = \frac{AD}{2} = 2 \text{ cm}.$$

**Pasul 2. Calculăm** $MQ$**.**

$O$ este mijlocul lui $BD$ și $Q$ este mijlocul lui $AD$, deci $OQ$ este linie mijlocie în triunghiul $ABD$: $OQ = \dfrac{AB}{2} = 2$ cm. Atunci

$$MQ = MO - OQ = 2\sqrt{2} - 2 \text{ cm}.$$

**Pasul 3.** $\triangle MPQ \sim \triangle BPA$**.**

$MQ \perp AD$ și $BA \perp AD$, deci $MQ \parallel AB$. Conform teoremei fundamentale a asemănării, $\triangle MPQ \sim \triangle BPA$, deci

$$\frac{PQ}{PA} = \frac{MQ}{BA} = \frac{2\sqrt{2}-2}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

**Pasul 4. Calculăm** $PA$**.**

Punctul $P$ aparține segmentului $AQ$, deci $PQ+PA=AQ=2$ cm:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot PA+PA=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{2}\cdot PA=2 \Rightarrow PA=\frac{4}{\sqrt{2}+1}=4\left(\sqrt{2}-1\right) \text{ cm}.$$

**Pasul 5. Tangenta unghiului $BPA$.**

Triunghiul $BAP$ este dreptunghic în $A$, deci

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle BPA)=\frac{AB}{PA}=\frac{4}{4\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=1+\sqrt{2}.$$

**Concluzie.** $\operatorname{tg}(\sphericalangle BPA)=1+\sqrt{2}$. ■