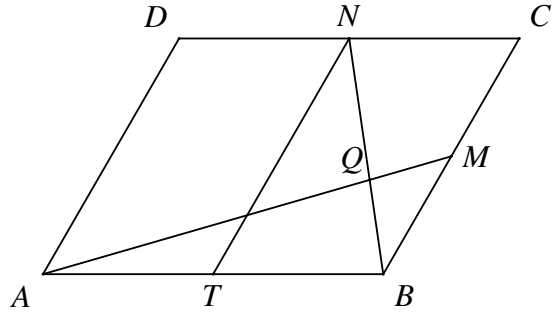
Problema 2 – Geometrie plană
Evaluarea Națională matematică, Sesiunea 2026, Examen

Enunț

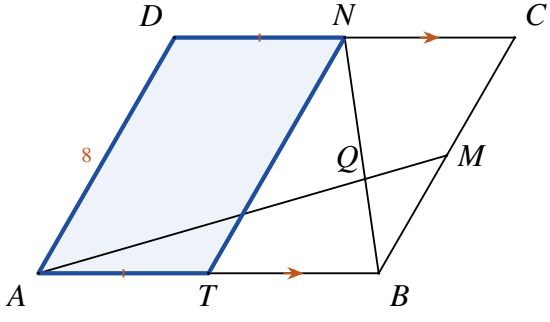
În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, cu $AB = 10$ cm și $AD = 8$ cm. Punctele M, N și T sunt mijloacele segmentelor BC, CD, respectiv AB, iar Q este punctul de intersecție a dreptelor BN și AM.



a) Calculează perimetrul patrulaterului $ATND$.

b) Calculează valoarea raportului $\dfrac{AQ}{QM}$.

Rezolvare a)



Ipoteză: $ABCD$ paralelogram, $AB = 10$ cm, $AD = 8$ cm; N mijlocul lui CD; T mijlocul lui AB.
Concluzie: $\mathscr{P}_{ATND} = ?$

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Lungimile segmentelor AT și DN.

Într-un paralelogram laturile opuse sunt congruente, deci $CD = AB = 10$ cm. Cum T și N sunt mijloacele lui AB și CD:

$$AT = \frac{AB}{2} = 5 \text{ cm}, \qquad DN = \frac{CD}{2} = 5 \text{ cm}.$$

Pasul 2. Natura patrulaterului $ATND$.

Laturile opuse ale paralelogramului sunt paralele: $AB \parallel CD$, deci $AT \parallel DN$. Patrulaterul $ATND$ are două laturi opuse paralele și congruente.

Teoremă. Un patrulater convex care are două laturi opuse paralele și congruente este paralelogram.

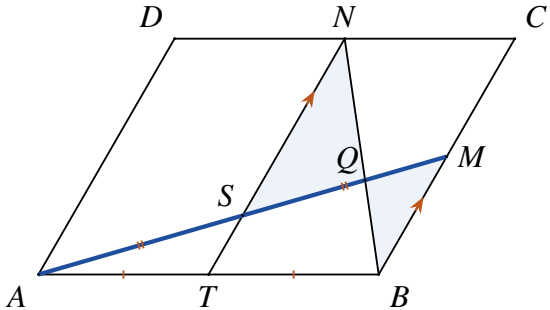
Prin urmare $ATND$ este paralelogram, deci $TN = AD = 8$ cm.

Pasul 3. Perimetrul.

$$\mathscr{P}_{ATND} = AT + TN + ND + DA = 5 + 8 + 5 + 8 = 26 \text{ cm}.$$

Concluzie. $\mathscr{P}_{ATND} = 26$ cm. ■

Rezolvare b) – Metoda 1 (ca în barem)



Ipoteză: $ABCD$ paralelogram, $AB = 10$ cm, $AD = 8$ cm; M, N, T mijloacele lui BC, CD, AB; $BN \cap AM = \{Q\}$.

Concluzie: $\dfrac{AQ}{QM} = ?$

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Punctul S și linia mijlocie TS.

Din punctul a), $ATND$ este paralelogram, deci $TN \parallel AD \parallel BC$ și $TN = 8$ cm. Fie $\{S\} = AM \cap TN$. În triunghiul ABM, T este mijlocul lui AB și $TS \parallel BM$.

Teoremă. Paralela dusă prin mijlocul unei laturi a unui triunghi la o altă latură trece prin mijlocul celei de-a treia laturi și este linie mijlocie.

Deci S este mijlocul lui AM și $TS = \dfrac{BM}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ cm. Rezultă $SN = TN - TS = 8 - 2 = 6$ cm.

Pasul 2. Asemănarea triunghiurilor QNS și QBM.

Cum $SN \parallel BM$, conform teoremei fundamentale a asemănării, $\triangle QNS \sim \triangle QBM$, deci

$$\frac{QS}{QM} = \frac{SN}{BM} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow QS = \frac{3}{2}QM, \quad SM = QS + QM = \frac{5}{2}QM.$$

Pasul 3. Concluzia.

S este mijlocul lui AM, deci $AM = 2 \cdot SM = 5 \cdot QM$ și $AQ = AM - QM = 4 \cdot QM$. Prin urmare

$$\frac{AQ}{QM} = 4. \blacksquare$$