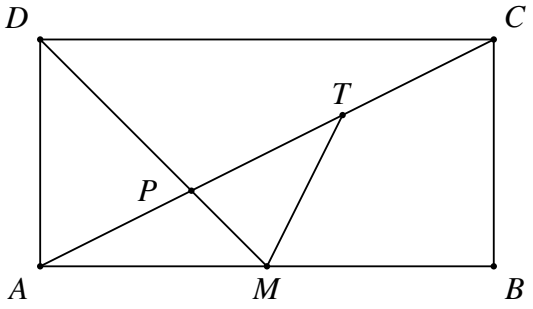
Problema 2 – Geometrie plană
Evaluarea Națională matematică, Sesiunea 2026, Rezervă examen

Enunț

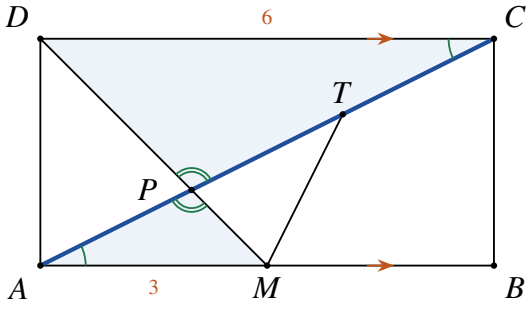
În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 6$ cm și $BC = 3$ cm. Punctul M este mijlocul laturii AB, iar dreptele AC și DM se intersectează în punctul P.



a) Arată că $CP = 2 \cdot AP$.

b) Determină lungimea segmentului MT, unde punctul T este mijlocul segmentului CP.

Rezolvare a)



Ipoteză: $ABCD$ dreptunghi, $AB = 6$ cm, $BC = 3$ cm; M mijlocul lui AB; $AC \cap DM = \{P\}$.
Concluzie: $CP = 2 \cdot AP$.

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Paralelismul dreptelor AM și CD.

Deoarece $ABCD$ este dreptunghi, $AB \parallel CD$ și $CD = AB = 6$ cm. Cum $M \in AB$, rezultă $AM \parallel CD$, iar

$$AM = \frac{AB}{2} = 3 \text{ cm}.$$

Pasul 2. Asemănarea triunghiurilor PAM și PCD.

Triunghiurile PAM și PCD au:

- $\sphericalangle PAM \equiv \sphericalangle PCD$ (unghiuri alterne interne, determinate de paralelele AB și CD cu secanta AC);
- $\sphericalangle APM \equiv \sphericalangle CPD$ (unghiuri opuse la vârf).

Conform cazului de asemănare U.U., $\triangle PAM \sim \triangle PCD$.

Pasul 3. Raportul de asemănare.

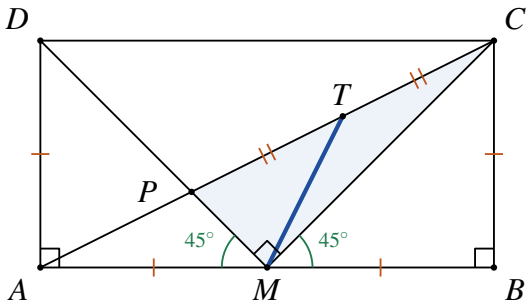
Din asemănare rezultă proporționalitatea laturilor omoloage:

$$\frac{AP}{CP} = \frac{MP}{DP} = \frac{AM}{CD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Pasul 4. Concluzia.

Din relația (1) obținem $CP = 2 \cdot AP$. ■

Rezolvare b) – Metoda 1 (ca în barem)



Ipoteză: $ABCD$ dreptunghi, $AB = 6$ cm, $BC = 3$ cm; M mijlocul lui AB; $AC \cap DM = \{P\}$; T mijlocul lui CP.
Concluzie: $MT = ?$

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Calculăm PC.

În triunghiul ABC, dreptunghic în B, aplicăm teorema lui Pitagora:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow AC = 3\sqrt{5} \text{ cm}.$$

Cum $P \in AC$ și, din punctul a), $CP = 2 \cdot AP$, avem $AP + 2 \cdot AP = 3\sqrt{5}$, deci

$$AP = \sqrt{5} \text{ cm}, \qquad PC = 2\sqrt{5} \text{ cm}. \tag{1}$$

Pasul 2. Arătăm că $\sphericalangle DMC = 90^\circ$.

Triunghiul DAM este dreptunghic în A, cu $AD = AM = 3$ cm, deci este dreptunghic isoscel și $\sphericalangle AMD = 45^\circ$. Analog, triunghiul MBC este dreptunghic în B, cu $MB = BC = 3$ cm, deci $\sphericalangle BMC = 45^\circ$. Atunci

$$\sphericalangle DMC = 180^\circ - \sphericalangle AMD - \sphericalangle BMC = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$

Pasul 3. Triunghiul PMC este dreptunghic.

Cum $P \in DM$, rezultă $\sphericalangle PMC = 90^\circ$, deci triunghiul PMC este dreptunghic în M, cu ipotenuza PC.

Pasul 4. Calculăm MT.

Punctul T este mijlocul ipotenuzei PC, deci MT este mediana corespunzătoare ipotenuzei.

Teoremă. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

Folosind relația (1):

$$MT = \frac{PC}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ cm}.$$

Concluzie. $MT = \sqrt{5}$ cm. ■