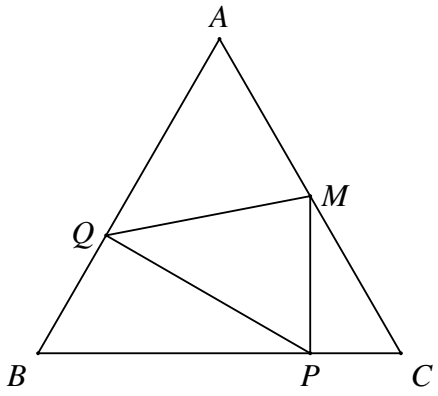
Problema 2 – Geometrie plană
Evaluarea Națională matematică, Sesiunea 2026, Simulare 1

Enunț

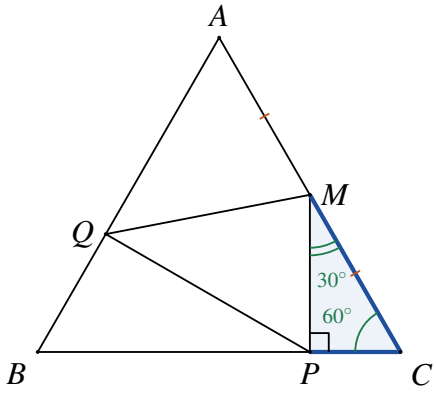
În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu $AB = 8$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului AC, punctul P este proiecția punctului M pe dreapta BC și punctul Q este proiecția punctului P pe dreapta AB.



a) Arată că $PC = 2$ cm.

b) Determină aria triunghiului MPQ.

Rezolvare a)



Ipoteză: $\triangle ABC$ echilateral, $AB = 8$ cm; M mijlocul lui AC; $MP \perp BC$, $P \in BC$.
Concluzie: $PC = 2$ cm

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Calculăm MC.

Triunghiul ABC este echilateral, deci $AC = AB = 8$ cm și $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Cum M este mijlocul lui AC, $MC = \dfrac{AC}{2} = 4$ cm.

Pasul 2. Unghiul PMC.

$MP \perp BC$, deci triunghiul MPC este dreptunghic în P și

$$\sphericalangle PMC = 90^\circ - \sphericalangle MCP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

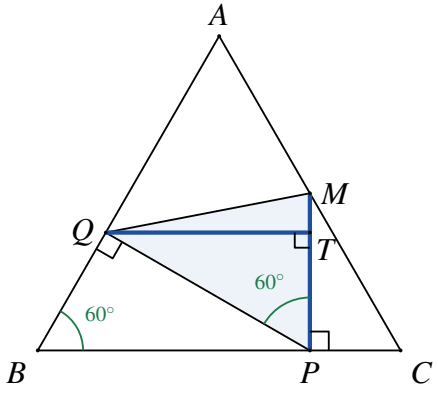
Pasul 3. Teorema unghiului de 30°.

În triunghiul dreptunghic MPC, cateta PC se opune unghiului de 30°, deci este jumătate din ipotenuza MC:

$$PC = \frac{MC}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}.$$

Concluzie. $PC = 2$ cm. ■

Rezolvare b) – Metoda 1 (ca în barem)



Ipoteză: $\triangle ABC$ echilateral, $AB = 8$ cm; M mijlocul lui AC; $MP \perp BC$, $P \in BC$; $PQ \perp AB$, $Q \in AB$.
Concluzie: $\mathscr{A}_{MPQ} = ?$

Rezolvare detaliată

Pasul 1. Calculăm MP.

Din punctul a), $PC = 2$ cm și $MC = 4$ cm. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul MPC, dreptunghic în P:

$$MP^2 = MC^2 - PC^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow MP = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Pasul 2. Calculăm PQ.

$BP = BC - PC = 8 - 2 = 6$ cm. Triunghiul BQP este dreptunghic în Q, cu $\sphericalangle QBP = 60°$, deci $\sphericalangle BPQ = 30°$ și, conform teoremei unghiului de 30°, $BQ = \dfrac{BP}{2} = 3$ cm. Conform teoremei lui Pitagora,

$$PQ^2 = BP^2 - BQ^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow PQ = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Pasul 3. Unghiul MPQ.

$\sphericalangle MPB = 90°$ și $\sphericalangle BPQ = 30°$, deci $\sphericalangle MPQ = 90° - 30° = 60°$.

Pasul 4. Înălțimea QT.

Fie T proiecția lui Q pe dreapta MP. În triunghiul QTP, dreptunghic în T:

$$QT = PQ \cdot \sin(\sphericalangle QPT) = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} \text{ cm}.$$

Pasul 5. Aria triunghiului MPQ.

$$\mathscr{A}_{MPQ} = \frac{MP \cdot QT}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2.$$

Concluzie. $\mathscr{A}_{MPQ} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2. ■