Capitolul II. Matrice
Lecția 1. Noțiunea de matrice

Tabel matriceal, definiție, notații, mulțimi de matrice

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără opere derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. Puțină istorie

Ideea de a așeza numerele într-un tablou este foarte veche. Într-o carte chinezească de acum aproape două mii de ani, *Cele nouă capitole ale artei matematice*, sistemele de ecuații erau rezolvate scriind coeficienții pe o tablă de calcul, pe linii și coloane, și făcând apoi operații cu aceste linii — practic, calcul cu matrice, fără ca cineva să le dea un nume.

Numele a venit mult mai târziu. În 1850, matematicianul englez **James Joseph Sylvester** a folosit cuvântul latinesc *matrix* („matcă", „locul din care se naște ceva"). Pentru el, tabloul de numere era „matca" din care se pot obține alte numere importante (determinanții, pe care îi veți studia în capitolul următor). Câțiva ani mai târziu, în 1858, prietenul său **Arthur Cayley** a arătat că matricele pot fi adunate și înmulțite, ca niște numere „mai mari", și a pus astfel bazele calculului matriceal.

Astăzi, matricele sunt peste tot: o fotografie digitală este un tablou uriaș de pixeli, foile de calcul (Excel) sunt tabele matriceale, iar jocurile video și inteligența artificială fac, în fiecare secundă, milioane de calcule cu matrice.

2. De la un tabel la o matrice

O cofetărie urmărește câte bucăți a vândut din trei produse în primele patru zile ale săptămânii:

	Luni	Marți	Miercuri	Joi
Eclere	24	30	18	27
Savarine	15	12	20	16
Tarte	9	14	11	10

Dacă reținem doar numerele, păstrând locul fiecăruia, obținem tabloul

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 30 & 18 & 27 \\ 15 & 12 & 20 & 16 \\ 9 & 14 & 11 & 10 \end{pmatrix},$$

numit **tabel matriceal**. El are 3 linii (câte una pentru fiecare produs) și 4 coloane (câte una pentru fiecare zi); spunem că este de *tipul* 3×4.

- Vânzările de eclere formează un *tabel matriceal linie*: $\begin{pmatrix} 24 & 30 & 18 & 27 \end{pmatrix}$.
- Vânzările de miercuri formează un *tabel matriceal coloană*: $\begin{pmatrix} 18 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix}$.

- Numărul 20 (savarinele vândute miercuri) se află pe **linia 2** și pe **coloana 3**; poziția lui este dată de perechea ordonată $(2,3)$.

Așadar, un tabel matriceal asociază fiecărei poziții (i,j) un număr. Această observație conduce la definiția matematică a matricei.

3. Definiția matricei

Definiție

Fie $m,n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $\mathbb{N}_m = \{1,2,\ldots,m\}$, $\mathbb{N}_n = \{1,2,\ldots,n\}$. Se numește **matrice de tipul** (m,n) **cu elemente numere complexe** o funcție

$$A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{C}, \qquad A(i,j) = a_{ij}.$$

Numerele a_{ij} se numesc **elementele** matricei A.

Matricea se scrie ca un tablou dreptunghiular cu m linii și n coloane:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Notații și terminologie

- Elementul a_{ij} se află la intersecția **liniei** i (primul indice) cu **coloana** j (al doilea indice).
- Prescurtat, scriem $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ sau $A = (a_{ij})_{m \times n}$.
- În loc de „matrice de tipul (m,n)” spunem și „matrice de tipul $m \times n$” sau „matrice cu m linii și n coloane”. O astfel de matrice are $m \cdot n$ elemente.
- Linia i a matricei este $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$, iar coloana j este formată din $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$.

Mulțimi de matrice

Mulțimea matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente numere complexe se notează $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Analog:
- $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ — matricele de tipul $m \times n$ cu elemente numere reale;
- $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$ — matricele de tipul $m \times n$ cu elemente numere raționale;
- $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ — matricele de tipul $m \times n$ cu elemente numere întregi.

Deoarece $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, avem $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{Z}) \subset \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{Q}) \subset \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Atenție!

- Ordinea indicilor contează: a_{23} (linia 2, coloana 3) și a_{32} (linia 3, coloana 2) sunt, în general, elemente diferite.
- Ordinea în scrierea tipului contează: o matrice 2×3 are 2 linii și 3 coloane, iar o matrice 3×2 are 3 linii și 2 coloane. Cele două tipuri sunt diferite, deși ambele matrice au câte 6 elemente.

4. Exemple rezolvate

Exemplul 1

Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 7 & 0 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Precizați tipul matricei și numărul de elemente. b) Scrieți $a_{13}, a_{24}, a_{31}, a_{34}$. c) Calculați suma elementelor de pe linia 2 și suma elementelor de pe coloana 3. d) Calculați $E = a_{11}^2 - a_{23} + a_{34}^{-1}$.

Rezolvare. a) Matricea are 3 linii și 4 coloane, deci este de tipul 3×4 și are $3 \cdot 4 = 12$ elemente.
b) a_{13} se află pe linia 1, coloana 3: $a_{13} = 0$. Analog, $a_{24} = 1$, $a_{31} = 7$, $a_{34} = -2$.
c) Linia 2: $2+4+(-6)+1 = 1$. Coloana 3: $0+(-6)+8 = 2$.
d) $a_{11} = 3$, $a_{23} = -6$, $a_{34} = -2$, deci $E = 3^2 - (-6) + (-2)^{-1} = 9 + 6 - \frac{1}{2} = \frac{29}{2}$.

Exemplul 2 (matrice dată printr-o regulă)

Scrieți matricea $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$, unde $a_{ij} = 2i - j$.

Rezolvare. Indicii iau valorile $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,3\}$. Calculăm pe rând:

$$a_{11} = 2-1 = 1, \quad a_{12} = 2-2 = 0, \quad a_{13} = 2-3 = -1,$$
$$a_{21} = 4-1 = 3, \quad a_{22} = 4-2 = 2, \quad a_{23} = 4-3 = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 3

Scrieți matricea $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{N})$, unde $b_{ij} = \max\{i, j\}$, și calculați suma tuturor elementelor ei.

Rezolvare. $b_{11} = 1$; $b_{12} = b_{21} = b_{22} = 2$; toate elementele care au un indice egal cu 3 sunt egale cu 3. Obținem

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad S = (1+2+3)+(2+2+3)+(3+3+3) = 6+7+9 = 22.$$

Exemplul 4

Scrieți matricea $C = (c_{ij}) \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$, unde $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot i \cdot j$.

Rezolvare. Semnul este „+” când $i+j$ este par și „−” când $i+j$ este impar:

$$c_{11} = 1,\ c_{12} = -2,\ c_{13} = 3, \qquad c_{21} = -2,\ c_{22} = 4,\ c_{23} = -6.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 5

O matrice are 12 elemente. Ce tipuri poate avea?

Rezolvare. Dacă matricea este de tipul $m \times n$, atunci $m \cdot n = 12$, cu $m, n \in \mathbb{N}^*$. Descompunerile lui 12 ca produs ordonat sunt

$$1 \cdot 12,\ 2 \cdot 6,\ 3 \cdot 4,\ 4 \cdot 3,\ 6 \cdot 2,\ 12 \cdot 1.$$

Tipurile posibile sunt 1×12, 2×6, 3×4, 4×3, 6×2, 12×1, adică 6 tipuri (câte divizori naturali are 12).

5. Exerciții propuse

1. Se dă matricea $C=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 0 & 3 & -4\end{pmatrix}$. Precizați tipul ei, scrieți c_{12}, c_{23} și calculați suma tuturor elementelor.

2. Scrieți matricea $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{N})$, unde $a_{ij}=i+2j$.

3. Scrieți matricea $B=(b_{ij})\in\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{N})$, unde $b_{ij}=\min\{i,j\}$.

4. Scrieți matricea $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{N})$, unde $a_{ij}=i^j$, și calculați suma elementelor ei.

5. Câte tipuri poate avea o matrice cu 18 elemente?

6. O matrice are 15 elemente, mai multe linii decât coloane și cel puțin două coloane. Ce tip are?

7. Scrieți matricea $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{N})$, unde $a_{ij}=|i-j|$. Câte elemente nule are?

8. Fie $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{Z})$, cu $a_{ij}=i^2-j^2$. Calculați a_{32}, a_{23} și a_{44}.

Răspunsuri

1. 2×3; $c_{12}=5$, $c_{23}=-4$; suma este 3. **2.** $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\\ 5 & 7\end{pmatrix}$. **3.** $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. **4.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 8 & 16\end{pmatrix}$; suma este 34. **5.** 6 tipuri (1×18, 2×9, 3×6, 6×3, 9×2, 18×1). **6.** 5×3. **7.** $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$; 3 elemente nule. **8.** $a_{32}=5$, $a_{23}=-5$, $a_{44}=0$.

Bibliografie

M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a. Trunchi comun + curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești — capitolul II „Matrice”, paragraful „Tabel matriceal. Matrice. Mulțimi de matrice”, pag. 17–19.