Capitolul II. Matrice
Lecția 2. Tipuri de matrice

Matrice linie, coloană, pătratică, nulă și alte matrice particulare

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără opere derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

În această lecție, $A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Unele matrice au o formă specială, care primește un nume. Le vom întâlni mereu în calcule, de aceea este bine să le recunoaștem imediat.

1. Matrice linie și matrice coloană

Definiții

- Dacă $m=1$, matricea are o singură linie, este de tipul $1\times n$ și se numește **matrice linie**: $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\end{pmatrix}$.
- Dacă $n=1$, matricea are o singură coloană, este de tipul $m\times 1$ și se numește **matrice coloană**: $A=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}$.

Exemple. $\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\end{pmatrix}$ este o matrice linie de tipul 1×3; $\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -5\end{pmatrix}$ este o matrice coloană de tipul 3×1; matricea $\begin{pmatrix}7\end{pmatrix}$ este, în același timp, linie și coloană (tipul 1×1).

2. Matrice pătratică

Definiție

Dacă $m=n$, matricea are tot atâtea linii câte coloane și se numește **matrice pătratică de ordinul n**:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Mulțimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente complexe se notează $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (în loc de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$).

Diagonale. Urma unei matrice pătratice

- **Diagonala principală** este formată din elementele $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ — elementele a_{ij} cu $i=j$.
- **Diagonala secundară** este formată din elementele $a_{1n},a_{2,n-1},\dots,a_{n1}$ — elementele a_{ij} cu $i+$

$j = n+1$.

- Suma elementelor de pe diagonala principală se numește **urma** matricei și se notează $\mathrm{Tr}(A) = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

De exemplu, pentru $n=3$: diagonala principală este a_{11}, a_{22}, a_{33}, iar diagonala secundară este a_{13}, a_{22}, a_{31} (indicii au suma 4).

Atenție!

Diagonalele și urma au sens **numai** pentru matrice pătratice. O matrice de tipul 2×3 nu are diagonală principală și nici urmă.

Determinantul unei matrice pătratice de ordinul 1, 2 sau 3

Fiecărei matrice pătratice A i se asociază un număr complex, numit **determinantul** matricei, notat $\det A$:

- pentru $A=(a_{11})\in \mathscr{M}_1(\mathbb{C})$: $\det A = |a_{11}| = a_{11}$ (aici barele nu înseamnă modul);
- pentru $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$: $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ (produsul elementelor de pe diagonala principală minus produsul elementelor de pe diagonala secundară).
- pentru $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Proprietățile determinanților și determinanții de ordin mai mare se studiază în capitolul următor.

Exemplu. Pentru $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$: $\mathrm{Tr}(A)=3+4=7$ și $\det A = 3\cdot 4-(-2)\cdot 5 = 12+10 = 22$.

Calculul determinantului de ordinul 3 — regula lui Sarrus

Formula de mai sus se reține ușor astfel:

1) se scrie determinantul și, sub el, se copiază **primele două linii**;
2) se înmulțesc elementele de pe cele trei „diagonale” paralele cu diagonala principală (de la stânga sus spre dreapta jos); produsele se iau **cu semnul „+”**;
3) se înmulțesc elementele de pe cele trei „diagonale” paralele cu diagonala secundară (de la dreapta sus spre stânga jos); produsele se iau **cu semnul „−”**;
4) se adună cele șase rezultate.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

cu „+”: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$, $a_{31}a_{12}a_{23}$;

cu „−”: $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{23}a_{32}a_{11}$, $a_{33}a_{12}a_{21}$.

Exemplu — determinant de ordinul 3

Calculați $\det A$ pentru $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. Copiem sub determinant primele două linii:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{array}$$

Produsele „în jos”, cu semnul „+”: $1\cdot 0\cdot 4=0,\ 3\cdot 1\cdot(-1)=-3,\ (-2)\cdot 2\cdot 2=-8.$
Produsele „în sus”, cu semnul „−”: $(-1)\cdot 0\cdot(-2)=0,\ 2\cdot 1\cdot 1=2,\ 4\cdot 2\cdot 3=24.$

$$\det A=(0-3-8)-(0+2+24)=-11-26=-37.$$

3. Matricea nulă

Definiție

Matricea de tipul $m\times n$ cu toate elementele egale cu 0 se numește **matricea nulă** și se notează $O_{m,n}$. Pentru matrice pătratice de ordinul n scriem O_n.

$$O_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

4. Matrice pătratice particulare

Fie $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Matrice diagonală. Matrice scalară. Matrice unitate

- A este **matrice diagonală** dacă toate elementele din afara diagonalei principale sunt nule: $a_{ij}=0$ pentru $i\neq j$.
- O matrice diagonală care are toate elementele de pe diagonala principală egale se numește **matrice scalară**.
- Matricea scalară cu elementele de pe diagonala principală egale cu 1 se numește **matricea unitate** (sau matricea identică) de ordinul n și se notează I_n:

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad I_n=(\delta_{ij}),\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Rolul matricei I_n (element neutru la înmulțirea matricelor) va fi studiat în Lecția 4.

Matrice triunghiulare

- A este **triunghiulară superior** dacă toate elementele de *sub* diagonala principală sunt nule: $a_{ij}=0$ pentru $i>j$.
- A este **triunghiulară inferior** dacă toate elementele de *deasupra* diagonalei principale sunt nule: $a_{ij}=0$ pentru $i<j$.

$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&6\\0&0&9\end{pmatrix}$ (triunghiulară superior), $\qquad\begin{pmatrix}4&0&0\\-1&2&0\\7&3&5\end{pmatrix}$ (triunghiulară inferior).

Matrice simetrică. Matrice antisimetrică

- A este **simetrică** dacă $a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice i, j — elementele așezate simetric față de diagonala principală sunt egale.
- A este **antisimetrică** dacă $a_{ij} = -a_{ji}$ pentru orice i, j — elementele așezate simetric față de diagonala principală sunt opuse.

Într-o matrice antisimetrică, pentru $i = j$ obținem $a_{ii} = -a_{ii}$, adică $2a_{ii} = 0$, deci **toate elementele de pe diagonala principală sunt nule**.

De reținut

Matrice diagonală	$a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$
Triunghiulară superior	$a_{ij} = 0$ pentru $i > j$ (zerouri sub diagonală)
Triunghiulară inferior	$a_{ij} = 0$ pentru $i < j$ (zerouri deasupra diagonalei)
Simetrică	$a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice i, j
Antisimetrică	$a_{ij} = -a_{ji}$ pentru orice i, j $(\Rightarrow a_{ii} = 0)$

O matrice diagonală este, în același timp, triunghiulară superior și triunghiulară inferior; ea este și simetrică.

5. Exemple rezolvate

Exemplul 1

Precizați tipul fiecărei matrice:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 0\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Rezolvare. A — matrice linie, tipul 1×4; B — pătratică de ordinul 2, diagonală; C — pătratică de ordinul 3, triunghiulară inferior (are zerouri deasupra diagonalei); $D=O_{3,2}$, matricea nulă de tipul 3×2.

Exemplul 2

Fie $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 4 & 3 & 0\\ -6 & 1 & 7\end{pmatrix}$. Scrieți elementele diagonalelor, calculați $\mathrm{Tr}(A)$ și suma elementelor de pe diagonala secundară.

Rezolvare. Diagonala principală: $a_{11}=2$, $a_{22}=3$, $a_{33}=7$, deci $\mathrm{Tr}(A)=2+3+7=12$.
Diagonala secundară ($i+j=4$): $a_{13}=5$, $a_{22}=3$, $a_{31}=-6$, cu suma $5+3-6=2$.

Exemplul 3

Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}x-3 & x^2-9\\ y+1 & 2y+3\end{pmatrix}$ este diagonală. Poate fi A egală cu I_2?

Rezolvare. A este diagonală $\Leftrightarrow$ elementele din afara diagonalei principale sunt nule:

$$x^2-9=0 \text{ și } y+1=0 \iff x\in\{-3,3\},\ y=-1.$$

Pentru ca $A=I_2$ ar trebui, în plus, $x-3=1$, adică $x=4$, ceea ce contrazice $x\in\{-3,3\}$. Așadar A este diagonală pentru $x\in\{-3,3\}$, $y=-1$, dar nu poate fi egală cu I_2.

Exemplul 4

Determinați $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}1 & a+2 & 3\\ 5 & 0 & b\\ c & -4 & 2\end{pmatrix}$ este simetrică.

Rezolvare. Punem condiția $a_{ij}=a_{ji}$ pentru perechile de poziții simetrice față de diagonală:

$$a_{12}=a_{21}:\ a+2=5;\qquad a_{13}=a_{31}:\ 3=c;\qquad a_{23}=a_{32}:\ b=-4.$$

$a=3,\quad b=-4,\quad c=3.$

Exemplul 5

Fie $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$ cu $a_{ij}=i-j$ și $B=(b_{ij})\in\mathscr{M}_3(\mathbb{N})$ cu $b_{ij}=i+j$. Arătați că A este antisimetrică și B este simetrică.

Rezolvare. $a_{ji}=j-i=-(i-j)=-a_{ij}$ pentru orice i,j, deci A este antisimetrică; $b_{ji}=j+i=$

$i+j=b_{ij}$, deci B este simetrică. Explicit:

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{pmatrix}.$$

Observăm că diagonala principală a lui A are numai zerouri, așa cum era de așteptat.

6. Exerciții propuse

1. Fie $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\0&4&6\\5&-1&-3\end{pmatrix}$. Calculați $\mathrm{Tr}(A)$ și suma elementelor de pe diagonala secundară.

2. Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $\begin{pmatrix}2x-4&x-2\\y+5&y^2-25\end{pmatrix}=O_2$.

3. Determinați $x,y,z\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $\begin{pmatrix}0&x&4\\2&1&y+1\\z&6&3\end{pmatrix}$ este simetrică.

4. Determinați $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $\begin{pmatrix}a&3&b\\c&d&-5\\2&e&0\end{pmatrix}$ este antisimetrică.

5. Arătați că matricea $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$, cu $a_{ij}=i^2-j^2$, este antisimetrică și scrieți-o.

6. Scrieți matricele I_4 și $O_{2,4}$.

7. Scrieți matricea $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_3(\mathbb{N})$, cu $a_{ij}=1$ dacă $i\leqslant j$ și $a_{ij}=0$ dacă $i>j$. Ce tip particular de matrice este?

8. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $\begin{pmatrix}m^2-1&0\\m+1&m^2-1\end{pmatrix}$ este matricea nulă O_2.

9. Fie $A=\begin{pmatrix}2&-3\\4&1\end{pmatrix}$. Calculați $\mathrm{Tr}(A)$ și $\det A$.

Răspunsuri

1. $\mathrm{Tr}(A)=4$; suma pe diagonala secundară este $1+4+5=10$. **2.** $x=2$, $y=-5$. **3.** $x=2$, $y=5$, $z=4$. **4.** $a=d=0$, $c=-3$, $b=-2$, $e=5$. **5.** $a_{ji}=j^2-i^2=-a_{ij}$; $A=\begin{pmatrix}0&-3&-8\\3&0&-5\\8&5&0\end{pmatrix}$. **6.** I_4 are 1 pe diagonala principală și 0 în rest; $O_{2,4}$ are 2 linii și 4 coloane de zerouri. **7.** $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, matrice triunghiulară superior.

8. $m=-1$. **9.** $\mathrm{Tr}(A)=3$, $\det A=2+12=14$.

Bibliografie

M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a. Trunchi comun + curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești — capitolul II „Matrice”, paragraful „Cazuri particulare de matrice”, pag. 19, și Teorema 3, pag. 25–26.