Capitolul II. Matrice
Lecția 3. Egalitatea matricelor

Definiție, proprietăți, determinarea unor parametri

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără opere derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. Când spunem că două matrice sunt egale?

Două tabele matriceale conțin aceeași informație numai dacă au același format și dacă, pe fiecare poziție, se află același număr. De exemplu,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

deși ambele matrice conțin numerele $1,2,3,4$: numărul 2 ocupă poziții diferite. Formalizăm această idee.

Definiție

Fie $A = (a_{ij})_{m\times n}$ și $B = (b_{ij})_{m\times n}$ două matrice din $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricele A și B se numesc **egale**, și scriem $A = B$, dacă

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{pentru orice } i \in \{1,2,\ldots,m\} \text{ și orice } j \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Dacă există cel puțin o pereche (i,j) pentru care $a_{ij} \neq b_{ij}$, matricele nu sunt egale și scriem $A \neq B$.

Atenție!

- Se compară numai matrice **de același tip**. Două matrice de tipuri diferite nu sunt egale niciodată; de exemplu, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (tipurile 1×3 și 3×1 diferă).
- Egalitatea a două matrice de tipul $m \times n$ înseamnă, de fapt, $m \cdot n$ egalități de numere, câte una pentru fiecare poziție. De aceea, o egalitate de matrice conduce, de regulă, la un **sistem de ecuații**.

Proprietățile relației de egalitate

Din proprietățile egalității numerelor complexe rezultă, pentru orice $A,B,C \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$:
- $A = A$ (reflexivitate);
- dacă $A = B$, atunci $B = A$ (simetrie);
- dacă $A = B$ și $B = C$, atunci $A = C$ (tranzitivitate).

2. Exemple rezolvate

Exemplul 1

Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} x+2 & 5 \\ -1 & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. Matricele au același tip (2×2). Egalăm elementele de pe aceleași poziții: $x+2=7$, $5=5$, $-1=-1$, $2y=8$.

$x=5, \quad y=4.$

Exemplul 2

Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} x+y & 3 \\ x-y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. Obținem sistemul $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$. Adunând ecuațiile: $2x=14$, deci $x=7$, apoi $y=3$.

$x=7, \quad y=3.$

Exemplul 3

Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} x^2 & 2 \\ 0 & y^2-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. $x^2=4 \Rightarrow x \in \{-2,2\}$; $y^2-y=6 \Leftrightarrow y^2-y-6=0 \Leftrightarrow (y-3)(y+2)=0 \Rightarrow y \in \{-2,3\}$. Necunoscutele se aleg independent, deci egalitatea are loc pentru 4 perechi: $(x,y) \in \{(-2,-2),(-2,3),(2,-2),(2,3)\}$.

Exemplul 4

Determinați $x \in \mathbb{R}$ și $y>0$ astfel încât $\begin{pmatrix} 2^x & \log_2 y \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. $2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x=3$; $\log_2 y = 5 \Rightarrow y = 2^5 = 32$ (convine, $y>0$).

$x=3, \quad y=32.$

Exemplul 5 (o egalitate imposibilă)

Există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} x+1 & 2x \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?

Rezolvare. Din $a_{11}=b_{11}$: $x+1=3$, deci $x=2$. Din $a_{12}=b_{12}$: $2x=6$, deci $x=3$. Același număr x nu poate fi simultan egal cu 2 și cu 3, deci nu există x cu proprietatea cerută.

Exemplul 6

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ ab & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. Din primele două ecuații, $a+b=5$ și $a-b=1$, obținem $a=3$, $b=2$. Verificăm a treia ecuație: $ab = 3 \cdot 2 = 6$. ✓

$a=3, \quad b=2.$

Când avem mai multe ecuații decât necunoscute, valorile găsite din unele ecuații trebuie verificate în celelalte.

Exemplul 7

Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} x^2+3 & 5 \\ 2y+1 & z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 15 & -8 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. $x^2+3=7 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x \in \{-2,2\}$; $2y+1=15 \Rightarrow y=7$; $z^3=-8 \Rightarrow z=-2$.

$(x,y,z) \in \{(-2,7,-2), (2,7,-2)\}$.

Exemplul 8 (matrice cu elemente complexe)

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} a^2-2+bi & 4 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & 4 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

Rezolvare. Din $a_{11}=b_{11}$: $(a^2-2)+bi=2+3i$. Două numere complexe sunt egale dacă au părțile reale egale și părțile imaginare egale: $a^2-2=2$ și $b=3$. Rezultă $a^2=4$.

$a \in \{-2,2\}, \quad b=3$.

3. Exerciții propuse

1. $\begin{pmatrix} x-3 & 4 \\ 2 & y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$.

2. $\begin{pmatrix} 2x+y & 1 \\ 0 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$.

3. $\begin{pmatrix} x^2 & y \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & y^2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați toate perechile (x,y) de numere reale.

4. $\begin{pmatrix} 3^x & 2 \\ \log_3 y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in \mathbb{R}$ și $y > 0$.

5. $\begin{pmatrix} x+y & 4 \\ xy & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} x & 2x \\ x^2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$? Justificați.

7. $\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$.

8. $\begin{pmatrix} |x| & 1 \\ 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$.

Răspunsuri

1. $x=8$, $y=-7$. **2.** $x=3$, $y=1$. **3.** $x \in \{-3,3\}$, $y \in \{0,1\}$: 4 perechi. **4.** $x=3$, $y=9$. **5.** $(x,y) \in \{(2,3),(3,2)\}$. **6.** Nu: din $x=2$ rezultă $x^2=4 \neq 5$. **7.** Adunând: $a+b+c=9$; $a=3$, $b=1$, $c=5$. **8.** $x \in \{-3,3\}$, $y=-1$.

Bibliografie

M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a. Trunchi comun + curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești — capitolul II „Matrice”, paragraful „Egalitatea matricelor”, pag. 20.