Capitolul II. Matrice
Lecția 4. Operații cu matrice

Adunarea, înmulțirea cu scalari, înmulțirea și ridicarea la putere

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără opere derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

I. Adunarea matricelor și proprietăți

Definiție

Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}$ și $B=(b_{ij})_{m\times n}$ din $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. **Suma** matricelor A și B este matricea $A+B=(c_{ij})_{m\times n}$, unde

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \qquad \text{pentru orice } i\in\{1,\dots,m\},\ j\in\{1,\dots,n\}.$$

Operația prin care oricăror două matrice de același tip li se asociază suma lor se numește **adunarea matricelor**.

Pe scurt: *se adună elementele aflate pe aceleași poziții.*

Atenție!

Se pot aduna **numai matrice de același tip**, iar suma are tot acel tip. De exemplu, suma $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ nu are sens.

Proprietățile adunării matricelor

Pentru orice $A,B,C\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$:

P1. $A+B=B+A$ (comutativitate);
P2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (asociativitate);
P3. $A+O_{m,n}=O_{m,n}+A=A$ ($O_{m,n}$ este element neutru);
P4. pentru orice $A=(a_{ij})$ există matricea $-A=(-a_{ij})$, numită **opusa** lui A, astfel încât $A+(-A)=(-A)+A=O_{m,n}$.

Demonstrația lui P1. Fie $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. Atunci $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ și $B+A=(b_{ij}+a_{ij})$. Adunarea numerelor complexe este comutativă, deci $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ pentru orice i,j; rezultă $A+B=B+A$. Proprietățile P2–P4 se demonstrează la fel, „trecând” la elemente.

Scăderea matricelor

Pentru $A,B\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, matricea $A+(-B)$ se notează $A-B$ și se numește **diferența** matricelor A și B:

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

Exemplul I.1

Fie $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 1\\ 2 & -4 & 7\end{pmatrix}$. Calculați $A+B$, $A-B$ și $-A$.

Rezolvare.

$$A+B=\begin{pmatrix}2-3 & -1+6 & 3+1\\ 0+2 & 4-4 & -5+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 4\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},\qquad A-B=\begin{pmatrix}5 & -7 & 2\\ -2 & 8 & -12\end{pmatrix},$$

$$-A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ 0 & -4 & 5\end{pmatrix}.$$

Exemplul I.2 (ecuație matriceală)

Determinați matricea X pentru care $X+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}$.

Rezolvare. Adunăm la ambii membri opusa matricei $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ (exact ca la numere, „trecem în celălalt membru”):

$$X=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}.$$

Exemplul I.3

Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix}x & 1\\ 2 & y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & y\\ x & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

Rezolvare. Suma din stânga este

$$\begin{pmatrix}x+3 & 1+y\\ 2+x & y+4\end{pmatrix}.$$

Din egalitatea matricelor: $x+3=5$, $1+y=4$, $2+x=4$, $y+4=7$. Obținem $x=2$, $y=3$, valori care verifică toate cele patru ecuații.

$x=2,\quad y=3.$

II. Înmulțirea matricelor cu scalari și proprietăți

Definiție

Fie $A=(a_{ij})_{m\times n}\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\alpha\in\mathbb{C}$ (un număr, numit *scalar*). **Produsul** dintre scalarul α și matricea A este matricea

$$\alpha A=(\alpha\, a_{ij})_{m\times n}.$$

Pe scurt: *se înmulțește fiecare element al matricei cu acel număr.*

Exemplu.

$$3\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 9 & 0\end{pmatrix};\qquad (-1)\begin{pmatrix}2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 5\end{pmatrix}.$$

Proprietățile înmulțirii cu scalari

Pentru orice $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ și orice $A,B\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$:

P1. $1\cdot A=A$;

P2. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;

P3. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributivitate față de adunarea scalarilor);
P4. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ (distributivitate față de adunarea matricelor);
P5. $\alpha A = O_{m,n} \iff \alpha = 0$ sau $A = O_{m,n}$.
În particular, $0 \cdot A = O_{m,n}$ și $(-1)A = -A$.

Demonstrația lui P4. Folosind distributivitatea înmulțirii numerelor față de adunare:

$$\alpha(A+B) = \big(\alpha(a_{ij}+b_{ij})\big) = \big(\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}\big) = (\alpha a_{ij}) + (\alpha b_{ij}) = \alpha A + \alpha B.$$

Exemplul II.1

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $2A - 3B$.

Rezolvare.

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Exemplul II.2 (ecuație matriceală)

Determinați $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X - A = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

$$2X = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Înmulțim cu scalarul $\frac{1}{2}$:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplul II.3 (sistem de ecuații matriceale)

Determinați $X, Y \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Rezolvare. Lucrăm ca la un sistem de ecuații cu numere. Adunând ecuațiile, respectiv scăzându-le:

$$2X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul II.4 (sumă de matrice)

Pentru $k \in \mathbb{N}^*$ fie $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 2k-1 & k^2 \end{pmatrix}$. Calculați $S_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

Rezolvare. Adunarea se face element cu element, deci fiecare element al lui S_n este o sumă de n termeni:

$$S_n = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} k & \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) & \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \end{pmatrix}.$$

Folosim sumele cunoscute:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2,$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$S_n=\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n^2 & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{pmatrix}.$$

Transpusa unei matrice

Definiție

Fie $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Se numește **transpusa** matricei A matricea ${}^tA=(b_{kl})\in\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, unde $b_{kl}=a_{lk}$ pentru orice $k\in\{1,\ldots,n\}$, $l\in\{1,\ldots,m\}$.
Practic, ${}^tA$ se obține din A **schimbând liniile în coloane**: linia 1 a lui A devine coloana 1 a lui ${}^tA$, linia 2 devine coloana 2 ș.a.m.d.

Exemplu.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

Proprietăți ale transpunerii

Pentru $A,B\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\alpha\in\mathbb{C}$:
- ${}^t({}^tA)=A$;
- ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$ și ${}^t(\alpha A)=\alpha\,{}^tA$;
- dacă $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, atunci ${}^tA\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ și $\mathrm{Tr}({}^tA)=\mathrm{Tr}(A)$ (diagonala principală nu se schimbă).

O matrice pătratică A este simetrică dacă ${}^tA=A$ și antisimetrică dacă ${}^tA=-A$ (vezi Lecția 2).

III. Înmulțirea matricelor și proprietăți

Definiție

Fie $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B=(b_{jk})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ (**numărul de coloane al lui A este egal cu numărul de linii al lui B**). **Produsul** matricelor A și B (în această ordine) este matricea $AB=(c_{ik})\in\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{C})$, unde

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}, \qquad i\in\{1,\ldots,m\},\ k\in\{1,\ldots,p\}.$$

Regula „linie pe coloană”. Elementul c_{ik} se obține înmulțind elementele *liniei i* a lui A cu elementele corespunzătoare ale *coloanei k* a lui B (primul cu primul, al doilea cu al doilea etc.) și adunând produsele.

$$\underbrace{(m\times n)}_{A}\cdot\underbrace{(n\times p)}_{B}=\underbrace{(m\times p)}_{AB}$$ — cele două numere „din mijloc” trebuie să coincidă.

Exemplul III.1

Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Calculați AB. Are sens BA?

Rezolvare. A are 2 coloane, B are 2 linii, deci AB există și este de tipul 2×3.

$$c_{11}=1\cdot 2+2\cdot(-1)=0, \qquad c_{12}=1\cdot 0+2\cdot 4=8, \qquad c_{13}=1\cdot 1+2\cdot 3=7,$$
$$c_{21}=3\cdot 2+(-1)\cdot(-1)=7, \quad c_{22}=3\cdot 0+(-1)\cdot 4=-4, \quad c_{23}=3\cdot 1+(-1)\cdot 3=0.$$

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 8 & 7\\ 7 & -4 & 0\end{pmatrix}.$$

BA nu are sens: B are 3 coloane, iar A are 2 linii.

Atenție! Diferențe față de înmulțirea numerelor

1) Produsul AB poate exista fără ca BA să existe (Exemplul III.1). Dacă $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, ambele produse există.
2) **Înmulțirea matricelor nu este comutativă**: în general, $AB\neq BA$. De exemplu, pentru $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$:
$$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$
3) Produsul a două matrice nenule poate fi matricea nulă:
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$
De aceea, din $AB=AC$ **nu** putem „simplifica” cu A și deduce $B=C$.
4) Linie $\times$ coloană dă o matrice 1×1, iar coloană $\times$ linie dă o matrice pătratică:
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ 5 & 10 & 15\\ 6 & 12 & 18\end{pmatrix}.$$

Proprietățile înmulțirii matricelor

Ori de câte ori produsele de mai jos au sens:

P1. $(AB)C=A(BC)$ (asociativitate);
P2. $A(B+C)=AB+AC$ și $(B+C)A=BA+CA$ (distributivitate față de adunare);
P3. $AI_n=I_nA=A$, pentru orice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (I_n este element neutru);
P4. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$, pentru orice $\alpha\in\mathbb{C}$;
P5. $AO_n=O_nA=O_n$, pentru orice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$;
P6. ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$ (ordinea factorilor se inversează!).

Pe mulțimea $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ produsul este definit pentru orice două matrice și rămâne în $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$; spunem că înmulțirea este o **lege de compoziție** pe $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, asociativă, cu element neutru I_n, dar necomutativă.

Demonstrația lui P3. Fie $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ și $I_n=(\delta_{jk})$, cu $\delta_{jk}=1$ pentru $j=k$ și 0 în rest. Elementul de pe poziția (i,k) al produsului AI_n este

$$a_{i1}\delta_{1k}+\cdots+a_{ik}\delta_{kk}+\cdots+a_{in}\delta_{nk}=a_{ik}\cdot 1=a_{ik},$$

deoarece toți ceilalți termeni conțin un factor $\delta_{jk}=0$. Deci $AI_n=A$; analog $I_nA=A$.

Demonstrația lui P2 (stânga). Elementul (i,k) al lui $A(B+C)$ este

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk},$$

adică suma elementelor (i,k) ale lui AB și AC.

Asociativitatea se demonstrează la fel, scriind elementul (i,l) al fiecărui membru ca o sumă dublă $\sum_j \sum_k a_{ij}b_{jk}c_{kl}$.

Exemplul III.2

Determinați toate matricele $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, adică $AX = XA$.

Rezolvare. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculăm

$$AX = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad XA = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}.$$

Din $AX = XA$: $a+c = a \Rightarrow c = 0$; $b+d = a+b \Rightarrow d = a$; celelalte egalități sunt atunci adevărate.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Exemplul III.3 (transpusa unui produs)

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Verificați că ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ și că, în general, ${}^t(AB) \neq {}^tA\,{}^tB$.

Rezolvare.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$${}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = {}^t(AB), \qquad {}^tA\,{}^tB = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 11 & 5 \end{pmatrix} \neq {}^t(AB).$$

Exemplul III.4

Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ să comute.

Rezolvare.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1+3x \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 2x+2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Din $AB = BA$ rezultă $1+3x = 2x+2$, deci $x = 1$.

IV. Ridicarea la putere a unei matrice și câteva proprietăți

Produsul $A \cdot A$ are sens numai dacă A are tot atâtea linii câte coloane. De aceea, **puterile se definesc numai pentru matrice pătratice**. Datorită asociativității, nu contează cum grupăm factorii.

Definiție

Fie $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Definim

$$A^0 = I_n, \qquad A^1 = A, \qquad A^{k+1} = A^k \cdot A \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Așadar $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$ ș.a.m.d.; A^k este produsul a k factori egali cu A.

Reguli de calcul

Pentru orice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ și orice $p, q \in \mathbb{N}$:

a) $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$;
b) $(A^p)^q = A^{pq}$;
c) $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p$ (puterile aceleiași matrice comută între ele);
d) $I_n^k = I_n$ și $O_n^k = O_n$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Atenție! Formulele de calcul prescurtat

Deoarece, în general, $AB \neq BA$:

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, \qquad (AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2 \quad \text{(în general)}.$$

De exemplu, pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ obținem

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{dar} \quad A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dacă însă $AB = BA$, atunci $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(AB)^k = A^k B^k$ și are loc **binomul lui Newton**:

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i A^{k-i} B^i, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Relația Hamilton–Cayley (pentru matrice de ordinul 2)

Pentru orice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ are loc egalitatea

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = O_2.$$

Demonstrație.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}, \qquad (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}.$$

Scăzând,

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -(ad-bc)I_2,$$

de unde rezultă egalitatea cerută. □

Cum $a+d=\mathrm{Tr}(A)$ și $ad-bc=\det A$, relația se scrie pe scurt

$$A^2-\mathrm{Tr}(A)\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2.$$

Exemplul IV.1 (calculul lui A^n prin inducție)

Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$. Calculați A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvare. Calculăm primele puteri:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix},\qquad A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}.$$

Bănuim că $A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$ și demonstrăm prin inducție matematică.

Verificare: pentru $n=1$ egalitatea este adevărată.

Pasul de inducție: presupunem $A^k=\begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}$. Atunci

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2k+2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2(k+1)\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix},\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Exemplul IV.2 (aceeași matrice, cu binomul lui Newton)

Scriem $A=I_2+N$, unde $N=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$. Matricea I_2 comută cu orice matrice, deci putem aplica binomul lui Newton. Cum

$$N^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2,$$

toate puterile N^k cu $k\geqslant 2$ sunt nule și

$$A^n=(I_2+N)^n=C_n^0I_2+C_n^1N=I_2+nN=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}.$$

Exemplul IV.3 (când A^2 este multiplu de A)

Fie $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. Calculați A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Rezolvare.

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2A.$$

Atunci $A^3=A^2A=2A^2=2^2A$, $A^4=2^3A$ și, prin inducție, $A^n=2^{n-1}A$.

$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix},\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Exemplul IV.4 (matrice diagonală)

Pentru $D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, prin înmulțire se constată că elementele de pe diagonală se ridică la putere (se demonstrează prin inducție, ca mai sus):

$$D^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix},\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

Exemplul IV.5 (folosirea relației Hamilton–Cayley)

Fie $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Exprimați A^2 și A^3 cu ajutorul lui A și I_2.

Rezolvare. Aici $a+d=5$ și $ad-bc=6-2=4$, deci $A^2-5A+4I_2=O_2$, adică

$$A^2=5A-4I_2=\begin{pmatrix}11 & 5\\ 10 & 6\end{pmatrix}.$$

Înmulțind cu A:

$$A^3=5A^2-4A=5(5A-4I_2)-4A=21A-20I_2=\begin{pmatrix}43 & 21\\ 42 & 22\end{pmatrix}.$$

Verificare directă:

$$A^2\cdot A=\begin{pmatrix}11 & 5\\ 10 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43 & 21\\ 42 & 22\end{pmatrix}.$$

Exerciții propuse

I. Adunarea

I.1. Fie $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & -6\end{pmatrix}$. Calculați $A+B$, $A-B$ și $B-A$.

I.2. Determinați X pentru care $X-\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

I.3. Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix}x & 2\\ y & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y & -2\\ 1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

II. Înmulțirea cu scalari

II.1. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$. Calculați $3A-2B$.

II.2. Determinați $X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $3X+A=2B$, unde $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

II.3. Rezolvați sistemul $X+2Y=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $2X+Y=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, cu $X,Y\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

II.4. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Scrieți ${}^tA$ și precizați tipul ei.

II.5. Pentru $k\in\mathbb{N}^*$ fie $A_k=\begin{pmatrix}1 & 2k\\ k+1 & 3\end{pmatrix}$. Calculați $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

III. Înmulțirea

III.1. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Calculați AB și BA. Comută matricele?

III.2. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$. Calculați AB și BA.

III.3. Arătați că pentru $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ avem $AB=O_2$, dar $BA\neq O_2$.

III.4. Determinați matricele $X\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

III.5. Determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ să comute.

III.6. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Calculați AB și verificați că ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$.

IV. Puteri

IV.1. Calculați A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, pentru $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

IV.2. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. Arătați că $A^2=4A$ și calculați A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

IV.3. Calculați A^n, $n\in\mathbb{N}^*$, pentru $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

IV.4. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Verificați că $A^2-3A+5I_2=O_2$ și exprimați A^3 în funcție de A și I_2.

IV.5. Pentru $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, comparați $(A+B)^2$ cu $A^2+2AB+B^2$. Explicați rezultatul.

Răspunsuri

I.1. $A+B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}5 & -7\\ -1 & 9\end{pmatrix}$, $B-A=-(A-B)=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ 1 & -9\end{pmatrix}$. **I.2.** $X=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -2 & 5 & 6\end{pmatrix}$. **I.3.** $x=3$, $y=2$.

II.1. $\begin{pmatrix}4 & 2\\ -11 & 5\end{pmatrix}$. **II.2.** $3X=2B-A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. **II.3.** Adunând: $X+Y=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. **II.4.** ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, tipul 3×2. **II.5.** $\begin{pmatrix}n & n(n+1)\\ \frac{n(n+3)}{2} & 3n\end{pmatrix}$.

III.1. $AB=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}4 & 6\\ -1 & -4\end{pmatrix}$; nu comută. **III.2.** $AB=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 8 & 4 & 0\end{pmatrix}$. **III.3.** $BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. **III.4.** $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a+b\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$. **III.5.** $x=1$. **III.6.** $AB=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\ -1 & 1 & -2\\ 7 & -1 & 5\end{pmatrix}$, ${}^t(AB)=\begin{pmatrix}4 & -1 & 7\\ -2 & 1 & -1\\ 5 & -2 & 5\end{pmatrix}={}^tB\,{}^tA$.

IV.1. $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3n & 1\end{pmatrix}$. **IV.2.** $A^n=4^{n-1}A$. **IV.3.** $A^n=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}$. **IV.4.** $A^3=3A^2-5A=4A-15I_2=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ 12 & -11\end{pmatrix}$. **IV.5.** $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}6 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}$, deoarece $AB\neq BA$.

Bibliografie

M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a. Trunchi comun + curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești — capitolul II „Matrice”, paragrafele 2.1–2.5, pag. 20–31.