Lecția 1. Mulțimea numerelor complexe

Puțină istorie. Construcția mulțimii $\mathbb{C}$. Drumul spre forma algebrică

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub Licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

Știai că… Povestea numerelor „imposibile”

Imaginează-ți Italia secolului al XVI-lea. Matematicienii nu publicau descoperirile în reviste — le păstrau secrete și se întreceau în *dueluri matematice*, în public, pe bani și pe reputație. Fiecare îi dădea adversarului o listă de probleme, iar cine rezolva mai multe câștiga tot: prestigiul, elevii, uneori chiar postul de profesor.

Pe la 1510, *Scipione del Ferro*, profesor la Bologna, găsește o metodă de rezolvare a unor ecuații de gradul al treilea. N-o spune nimănui, cu excepția elevului său, Antonio Fior. Fior se simte invincibil și, în 1535, îl provoacă la duel pe *Niccolò Tartaglia* („Bâlbâitul” — poreclă căpătată după o rană din copilărie). Surpriză: Tartaglia descoperă singur metoda cu câteva zile înainte, rezolvă toate cele 30 de probleme primite, iar Fior… niciuna.

Vestea ajunge la *Gerolamo Cardano*, medic, astrolog, jucător de noroc și matematician genial. Cardano îl tot roagă pe Tartaglia să-i dezvăluie secretul, până când acesta cedează, cu o condiție: Cardano să jure că nu-l publică. Câțiva ani mai târziu, Cardano află că del Ferro avea metoda de mult, notată într-un caiet vechi. „Atunci nu mai sunt legat de jurământ!” — și, în **1545**, o publică în celebra carte *Ars Magna*. Tartaglia a fost furios toată viața.

Numai că metoda avea o „problemă”. Uneori, pe drum, apăreau rădăcini pătrate din numere negative — ceva ce, evident, nu există. Cardano dă chiar un exemplu: *împarte 10 în două părți al căror produs să fie 40*. Calculul îi dă $5+\sqrt{-15}$ și $5-\sqrt{-15}$. Le verifică, vede că „merg”, apoi ridică din umeri: sunt, spune el, subtile, dar inutile.

Cel care are curajul să meargă mai departe este *Rafael Bombelli*, un inginer care desecase mlaștini. În 1572 el ia ecuația $x^3 = 15x+4$, care are soluția simplă $x=4$. Formula lui Cardano îi dă însă ceva ciudat: $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. În loc să renunțe, Bombelli decide să calculeze cu $\sqrt{-1}$ *ca și cum ar fi un număr obișnuit*. Și descoperă că $(2+\sqrt{-1})^3 = 2+\sqrt{-121}$. Atunci $x = (2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1}) = 4$. Numerele „imposibile” au dus la răspunsul corect!

Au urmat două secole de neîncredere. *Descartes* le-a numit, ironic, numere *imaginare* — și numele a rămas. *Euler* a notat cu i numărul al cărui pătrat este -1, iar *Gauss* le-a botezat *numere complexe* și le-a făcut respectabile. A rămas o întrebare incomodă: *ce este, de fapt, i?* Răspunsul liniștitor l-a dat irlandezul *William Rowan Hamilton*, în 1837: un număr complex este pur și simplu o *pereche de numere reale*, cu niște reguli de calcul bine alese. Nimic misterios. Exact așa vom face și noi.

Iar „inutilele” numere ale lui Cardano sunt astăzi peste tot: în electrotehnică, în fizica cuantică, în telefonul tău (prelucrarea sunetului și a imaginii) și în proiectarea avioanelor.

1. De ce avem nevoie de numere noi?

Mulțimile de numere au fost extinse de fiecare dată când o ecuație simplă nu avea soluție:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Ecuația $x+5=2$ nu are soluție în $\mathbb{N}$, dar are în $\mathbb{Z}$; ecuația $3x=2$ nu are soluție în $\mathbb{Z}$, dar are în $\mathbb{Q}$; ecuația $x^2=2$ nu are soluție în $\mathbb{Q}$, dar are în $\mathbb{R}$. Ecuația

$$x^2+1=0$$

nu are soluție în $\mathbb{R}$, deoarece $x^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Construim o mulțime mai largă decât $\mathbb{R}$, în care să putem aduna și înmulți după regulile cunoscute și în care această ecuație să aibă soluție.

2. Construcția mulțimii numerelor complexe

Urmând ideea lui Hamilton, pornim de la mulțimea perechilor ordonate de numere reale

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Două perechi sunt egale dacă au componentele corespunzătoare egale: $(a,b)=(c,d) \iff a=c$ și $b=d$. (Atenție la ordine: $(2,3) \neq (3,2)$.)

Definiție

Pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim două operații:

$$\begin{aligned} &\text{adunarea:} && (a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d), \\ &\text{înmulțirea:} && (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc). \end{aligned}$$

Mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ înzestrată cu aceste două operații se notează cu $\mathbb{C}$ și se numește **mulțimea numerelor complexe**. Elementele ei se numesc **numere complexe**.

Exemple. $(2,-3)+(1,4)=(3,1)$; $\quad (2,-3)\cdot(1,4) = \big(2\cdot 1-(-3)\cdot 4,\ 2\cdot 4+(-3)\cdot 1\big) = (14,5)$.

Adunarea se face „pe componente”, dar înmulțirea *nu*: $(a,b)\cdot(c,d) \neq (ac,bd)$. Regula înmulțirii a fost aleasă astfel încât să se păstreze regulile de calcul din $\mathbb{R}$ și, în același timp, să apară un număr al cărui pătrat este -1. Vedem imediat cum.

3. Numerele reale sunt numere complexe

Să ne uităm la perechile cu a doua componentă 0:

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,\ 0), \qquad (a,0)\cdot(b,0) = (ab-0\cdot 0,\ a\cdot 0+0\cdot b) = (ab,\ 0).$$

Perechile $(a,0)$ se adună și se înmulțesc exact ca numerele reale a și b. Prin urmare nu facem nicio greșeală dacă le identificăm:

Identificare

$$(a,0) = a, \quad \text{pentru orice } a \in \mathbb{R}.$$

Astfel $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ și $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Observăm și că înmulțirea cu un număr real se face pe componente:

$$b\cdot(c,d) = (b,0)\cdot(c,d) = (bc-0\cdot d,\ bd+0\cdot c) = (bc,\ bd).$$

4. Unitatea imaginară

Definiție

Numărul complex $(0,1)$ se notează cu i și se numește **unitatea imaginară**. Avem

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1, \qquad \text{deci} \qquad i^2 = -1.$$

Am găsit ce căutam: ecuația $x^2+1=0$ are în $\mathbb{C}$ soluția i (și, la fel, $-i=(0,-1)$, deoarece $(0,-1)\cdot(0,-1)=(-1,0)$). Numărul misterios $\sqrt{-1}$ al lui Bombelli este, de fapt, perechea $(0,1)$.

5. Cum s-a ajuns la forma algebrică

Fie $z=(a,b)$ un număr complex oarecare. Îl descompunem în doi termeni și folosim §3 și §4:

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)\cdot(0,1) = a + b\cdot i.$$

Forma algebrică

Orice număr complex $z=(a,b)$ se scrie sub forma

$$z = a+bi, \qquad a,b\in\mathbb{R}, \quad i^2=-1,$$

numită **forma algebrică** a numărului complex. Așadar

$$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}.$$

Cu această scriere nu mai trebuie să reținem formula înmulțirii perechilor: înmulțim ca de obicei și înlocuim i^2 cu -1:

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bd\,i^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i,$$

adică exact $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,\ ad+bc)$. Așa a „ghicit” Bombelli regulile, cu trei secole înainte de Hamilton. Forma algebrică și calculul cu ea sunt studiate în Lecția 2.

6. Exerciții rezolvate

Exercițiul rezolvat 1

Enunț. Fie $z_1=(2,-3)$ și $z_2=(1,4)$. Calculați z_1+z_2 și z_1z_2, apoi scrieți numerele z_1, z_2 și z_1z_2 în forma algebrică.
Rezolvare. $z_1+z_2=(2+1,\ -3+4)=(3,1)$; $z_1z_2=\big(2\cdot 1-(-3)\cdot 4,\ 2\cdot 4+(-3)\cdot 1\big)=(14,5)$. În forma algebrică: $z_1=2-3i$, $z_2=1+4i$, $z_1z_2=14+5i$. *Verificare:* $(2-3i)(1+4i)=2+8i-3i-12i^2=14+5i$. ✓

Exercițiul rezolvat 2

Enunț. Determinați numerele reale x și y pentru care $(x+y,\ x-y)=(5,1)$.

Rezolvare. Din egalitatea perechilor: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3,\ y=2.$

Exercițiul rezolvat 3

Enunț. Determinați toate numerele complexe $z=(x,y)$ pentru care $z^2=(-1,0)$.
Rezolvare. $z^2=(x,y)\cdot(x,y)=(x^2-y^2,\ 2xy)$. Din $(x^2-y^2,\ 2xy)=(-1,0)$ obținem $x^2-y^2=-1$ și $xy=0$. Dacă $y=0$, atunci $x^2=-1$, imposibil în $\mathbb{R}$. Deci $x=0$ și $y^2=1$, adică $y=\pm 1$. Soluțiile

sunt $(0,1)=i$ și $(0,-1)=-i$.

Exercițiul rezolvat 4 (calculul lui Bombelli, cu perechi)

Enunț. Arătați că $(2,1)^3=(2,11)$.
Rezolvare. $(2,1)^2=(2\cdot 2-1\cdot 1,\ 2\cdot 1+1\cdot 2)=(3,4)$, apoi $(2,1)^3=(3,4)\cdot(2,1)=(6-4,\ 3+8)=(2,11)$.
În forma algebrică: $(2+i)^3=2+11i$. Cum $(11i)^2=-121$, numărul $2+11i$ este cel pe care Bombelli îl scria $2+\sqrt{-121}$.

7. Exersează

1. Determinați numerele reale x și y pentru care $(x+y,\ 2x-y)=(5,1)$.

2. Fie $z_1=(3,-1)$ și $z_2=(-2,5)$. Calculați z_1+z_2 și z_1z_2.

3. Calculați: a) $(1,1)^2$; b) $(0,1)^3$; c) $(0,1)^4$.

4. Arătați că $(a,b)\cdot(a,-b)=(a^2+b^2,\ 0)$ și calculați $(3,4)\cdot(3,-4)$.

5. Scrieți în forma algebrică numerele complexe $(4,-1)$, $(0,3)$, $(-2,0)$, $(0,-1)$.

6. Scrieți sub formă de pereche numerele complexe $5i-1$, $-i$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}+i$.

7. Determinați toate numerele complexe z pentru care $z^2=(-4,0)$.