Prof. Micu Elena

Micu Elena

Aplicații din auxiliar. Geometrie plană

Clasa a VI-a

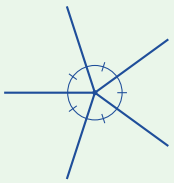
Unghiuri formate în jurul unui punct (aplicațiile 1–10) – rezolvări

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este publicat sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0): poate fi distribuit gratuit, cu indicarea autorului și a sursei, fără modificări și fără scop comercial.

Aplicația 1

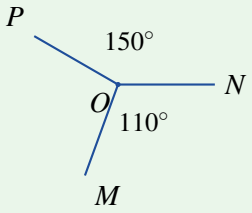
Unghiurile marcate din figură sunt congruente. a) Care este suma măsurilor lor? b) Cum se numesc unghiurile marcate? c) Care este măsura lor?



Rezolvare. a) Unghiurile au vârful comun și interioarele lor nu au puncte comune, deci suma măsurilor lor este 360°.
b) Sunt unghiuri în jurul unui punct.
c) Sunt 5 unghiuri congruente, deci fiecare are măsura $360^\circ : 5 = 72^\circ$.

Aplicația 2

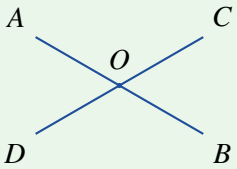
$\sphericalangle MON = 110^\circ$, $\sphericalangle NOP = 150^\circ$. Calculați măsura unghiului POM.



Rezolvare. Unghiurile MON, NOP, POM sunt în jurul punctului O, deci $\sphericalangle MON + \sphericalangle NOP + \sphericalangle POM = 360^\circ$.
$110^\circ + 150^\circ + \sphericalangle POM = 360^\circ$, de unde $\sphericalangle POM = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$.

Aplicația 3

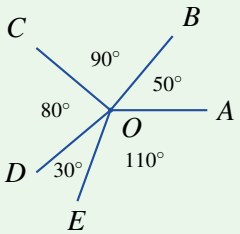
a) Scrieți unghiurile formate în jurul punctului O. b) Scrieți unghiurile opuse la vârf. c) Dacă $\sphericalangle BOC = 45^\circ$, calculați măsurile celorlalte unghiuri.



Rezolvare. a) $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COB$, $\sphericalangle BOD$, $\sphericalangle DOA$.
b) $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle BOD$; $\sphericalangle COB$ și $\sphericalangle DOA$.
c) $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC = 45^\circ$ (opuse la vârf);
$\sphericalangle AOC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ (adiacente suplementare cu $\sphericalangle BOC$);
$\sphericalangle BOD = \sphericalangle AOC = 135^\circ$ (opuse la vârf).

Aplicația 4

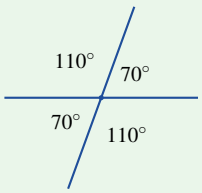
Cinci unghiuri în jurul punctului O au măsurile $2x^\circ - 10^\circ$, $2x^\circ + 30^\circ$, $3x^\circ - 10^\circ$, x° și $4x^\circ - 10^\circ$. a) Calculați măsurile. b) Desen. c) Există unghiuri obtuze?



Rezolvare. a) $(2x-10)+(2x+30)+(3x-10)+x+(4x-10) = 360$, adică $12x = 360$, deci $x = 30$.
Măsurile sunt: 50°, 90°, 80°, 30°, 110°.
b) Desenul alăturat: $\sphericalangle AOB = 50^\circ$, $\sphericalangle BOC = 90^\circ$, $\sphericalangle COD = 80^\circ$, $\sphericalangle DOE = 30^\circ$, $\sphericalangle EOA = 110^\circ$.
c) Da, un singur unghi obtuz: $\sphericalangle EOA = 110^\circ$ (cel cu măsura $4x^\circ - 10^\circ$).

Aplicația 5

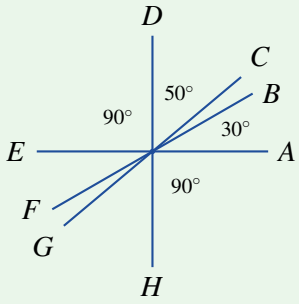
Calculați măsurile unghiurilor formate de două drepte concurente, știind că diferența măsurilor a două dintre unghiuri este de 40°.



Rezolvare. Două drepte concurente formează patru unghiuri: două câte două opuse la vârf (congruente), iar două unghiuri alăturate sunt adiacente suplementare. Diferența de 40° nu poate fi între două unghiuri opuse la vârf (diferența lor e 0°), deci este între două unghiuri adiacente suplementare: $a+b=180^\circ$ și $b-a=40^\circ$.
Atunci $2a=140^\circ$, $a=70^\circ$, $b=110^\circ$. Unghiurile au măsurile 70°, 110°, 70°, 110°.

Aplicația 6

Patru drepte concurente într-un punct. Patru din cele opt unghiuri care nu au puncte interioare comune au măsurile x°, $x^\circ-20^\circ$, $x^\circ+20^\circ$, $3x^\circ$. a) Calculați măsurile. b) Desen. c) Există unghiuri drepte?



$\sphericalangle BOC = 10^\circ$

Rezolvare. a) Cele opt unghiuri sunt două câte două opuse la vârf, deci patru unghiuri consecutive formează împreună un unghi alungit: $x+(x-20)+(x+20)+3x=180$, adică $6x=180$, $x=30$.
Măsurile: 30°, 10°, 50°, 90°, iar celelalte patru unghiuri (opuse la vârf cu acestea) au aceleași măsuri.
b) Desenul alăturat: $\sphericalangle AOB=30^\circ$, $\sphericalangle BOC=10^\circ$, $\sphericalangle COD=50^\circ$, $\sphericalangle DOE=90^\circ$; semidreptele OE, OF, OG, OH sunt opusele semidreptelor OA, OB, OC, OD.
c) Da: $\sphericalangle DOE=90^\circ$ (cel cu măsura $3x^\circ$) și opusul său la vârf, $\sphericalangle HOA=90^\circ$.

Aplicația 7

Două drepte concurente în O; suma măsurilor a trei dintre unghiurile formate în jurul lui O este 240°. Calculați măsurile unghiurilor.

Rezolvare. Suma tuturor celor patru unghiuri este 360°, deci al patrulea unghi are $360^\circ-240^\circ=120^\circ$. Opusul său la vârf are tot 120°, iar celelalte două sunt adiacente suplementare cu el: $180^\circ-120^\circ=60^\circ$.
Unghiurile au măsurile 120°, 60°, 120°, 60°. *Verificare:* $60^\circ+120^\circ+60^\circ=240^\circ$.

Aplicația 8

Ce unghi descrie: a) minutarul în 30 de minute; dar într-un minut? b) orarul într-o oră; dar într-un minut?

Rezolvare. a) Minutarul face un tur complet (360°) în 60 de minute. În 30 de minute descrie $360^\circ:2=180^\circ$ (un unghi alungit), iar într-un minut $360^\circ:60=6^\circ$.
b) Orarul face un tur complet în 12 ore. Într-o oră descrie $360^\circ:12=30^\circ$, iar într-un minut $30^\circ:60=0{,}5^\circ=30'$.

Aplicația 9

Cinci unghiuri în jurul unui punct au măsurile exprimate prin numere naturale consecutive. Calculați măsurile.

Rezolvare. Notăm măsurile cu n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ (în grade). Suma lor este 360°: $5n+10=360$, $5n=350$, $n=70$.
Unghiurile au măsurile 70°, 71°, 72°, 73°, 74°.

Aplicația 10

a) Putem avea 17 unghiuri în jurul unui punct cu măsurile exprimate prin numere naturale consecutive? b) Dar 14 unghiuri? c) Determinați numărul maxim de astfel de unghiuri.

Rezolvare. a) Măsurile ar fi n, $n+1$, …, $n+16$, cu suma $17n+(1+2+\ldots+16)=17n+136$. Din $17n+136=360$ rezultă $17n=224$, dar 224 nu se împarte exact la 17. **Nu** putem avea 17 astfel de unghiuri. b) Suma este $14n+(1+2+\ldots+13)=14n+91=360$, deci $14n=269$; 269 nu se împarte exact la 14. **Nu** putem avea 14 astfel de unghiuri.

c) Pentru k unghiuri cu măsurile n, $n+1$, …, $n+k-1$ (cu $n\geq 1$) suma este $kn+\dfrac{k(k-1)}{2}=360$, adică $k\cdot(2n+k-1)=720$.

Cum $2n+k-1\geq k+1$, avem $k\cdot(k+1)\leq 720$, deci $k\leq 26$. Căutăm cel mai mare divizor k al lui 720, cu $k\leq 26$, pentru care $2n+k-1=720:k$ dă un n natural nenul: $k=24$: $2n+23=30$ — imposibil; $k=20$: $2n+19=36$ — imposibil; $k=18$: $2n+17=40$ — imposibil; $k=16$: $2n+15=45$, $n=15$ — convine.

Numărul maxim este **16**, cu măsurile 15°, 16°, …, 30°. *Verificare:* $15+16+\ldots+30=\dfrac{(15+30)\cdot 16}{2}=360$.