Prof. Micu Elena
Micu Elena

Calcule cu măsuri de unghiuri

Clasa a V-a

Material de studiu

1. Unitățile de măsură pentru unghiuri

Unitatea de măsură pentru unghiuri este **gradul**, notat 1°. Pentru a măsura cu mai multă precizie, gradul se împarte în 60 de părți egale, numite **minute**, iar minutul se împarte în 60 de părți egale, numite **secunde**. Spunem că minutele și secundele sunt **sexagesimale** (de la cuvântul latin *sexaginta* = șaizeci).

Rețineți!

$$1^\circ = 60', \qquad 1' = 60'', \qquad 1^\circ = 60 \cdot 60'' = 3600''.$$

O măsură exprimată în grade, minute și secunde se scrie, de exemplu, $53^\circ 41' 18''$ și se citește „53 de grade, 41 de minute și 18 secunde". Numărul de minute și numărul de secunde dintr-o măsură scrisă corect sunt întotdeauna mai mici decât 60.

2. Transformări între unități

2.1. Din unități mai mari în unități mai mici

Pentru a transforma gradele în minute, **înmulțim cu** 60; pentru a transforma minutele în secunde, **înmulțim cu** 60.

Exemplul 1. Transformați în minute măsura $4^\circ 23'$.

Pasul 1. Transformăm gradele în minute: $4^\circ = 4 \cdot 60' = 240'$.

Pasul 2. Adunăm minutele existente: $240' + 23' = 263'$.

Deci $4^\circ 23' = 263'$.

Exemplul 2. Transformați în secunde măsura $2^\circ 7' 45''$.

Pasul 1. Transformăm gradele în minute și adunăm minutele: $2^\circ 7' = 120' + 7' = 127'$.

Pasul 2. Transformăm minutele în secunde: $127' = 127 \cdot 60'' = 7620''$.

Pasul 3. Adunăm secundele existente: $7620'' + 45'' = 7665''$.

Deci $2^\circ 7' 45'' = 7665''$.

2.2. Din unități mai mici în unități mai mari

Pentru a transforma secundele în minute (sau minutele în grade), **împărțim cu rest la** 60: câtul reprezintă numărul de unități de ordin superior, iar restul rămâne în unitatea inițială.

Exemplul 3. Exprimați în grade, minute și secunde măsura $11\,538''$.

Pasul 1. Aflăm câte grupe de câte $60''$ (adică câte minute) se formează: $11\,538 = 60{\cdot}192{+}18$, deci $11\,538'' = 192'18''$.

Pasul 2. Aflăm câte grupe de câte $60'$ (adică câte grade) se formează din $192'$: $192 = 60 \cdot 3 + 12$, deci $192' = 3°12'$.

Pasul 3. Scriem rezultatul: $11\,538'' = 3°12'18''$.

Verificare: $3 \cdot 3600 + 12 \cdot 60 + 18 = 10\,800 + 720 + 18 = 11\,538$.

2.3. Fracții de grad

Uneori măsura este dată printr-un număr zecimal de grade. Partea zecimală se transformă în minute înmulțind-o cu 60.

Exemplul 4. Scrieți în grade și minute măsurile $25{,}5°$ și $0{,}2°$.

$25{,}5° = 25° + 0{,}5 \cdot 60' = 25°30'$; $\qquad 0{,}2° = 0{,}2 \cdot 60' = 12'$.

3. Adunarea măsurilor unghiurilor

Regula

Se adună între ele unitățile de același ordin: secundele cu secundele, minutele cu minutele, gradele cu gradele. Dacă la secunde (sau la minute) se obțin 60 sau mai multe unități, fiecare grupă de 60 se transformă într-o unitate de ordin imediat superior, care se adaugă la acel ordin.

Exemplul 5. Adunare fără depășire: $41°26' + 33°12'$.

$41°26' + 33°12' = (41° + 33°) + (26' + 12') = 74°38'$.

Exemplul 6. Adunare cu depășire la minute: $96°47' + 51°35'$.

Pasul 1. Adunăm separat gradele și minutele: $(96° + 51°) + (47' + 35') = 147°82'$.

Pasul 2. Cum $82' \geq 60'$, scriem $82' = 60' + 22' = 1°22'$.

Pasul 3. Adăugăm gradul obținut: $147° + 1° + 22' = 148°22'$.

Exemplul 7. Adunare cu depășire la secunde și la minute: $38°47'36'' + 29°48'51''$.

În practică, măsurile se scriu una sub alta, cu unitățile de același ordin în aceeași coloană:

$$\begin{array}{r} 38°\,47'\,36'' + \\ 29°\,48'\,51'' \\ \hline 67°\,95'\,87'' \end{array}$$

Pasul 1. Secundele: $36'' + 51'' = 87'' = 60'' + 27'' = 1'27''$. Scriem $27''$ și „ținem în minte” $1'$.

Pasul 2. Minutele: $47' + 48' + 1' = 96' = 60' + 36' = 1°36'$. Scriem $36'$ și ținem în minte $1°$.

Pasul 3. Gradele: $38° + 29° + 1° = 68°$.

Deci $38°47'36'' + 29°48'51'' = 68°36'27''$.

Exemplul 8. Adunarea mai multor măsuri: $14°36'48'' + 9°52'37'' + 21°45'29'' + 16°58'54''$.

Pasul 1. Secundele: $48'' + 37'' + 29'' + 54'' = 168'' = 2 \cdot 60'' + 48'' = 2'48''$. Scriem $48''$ și ținem în minte $2'$.

Pasul 2. Minutele: $36' + 52' + 45' + 58' + 2' = 193' = 3 \cdot 60' + 13' = 3°13'$. Scriem $13'$ și ținem în minte $3°$.

Pasul 3. Gradele: $14° + 9° + 21° + 16° + 3° = 63°$.

Deci suma este $63°13'48''$. Observăm că, de data aceasta, s-au format mai multe grupe de câte 60 de unități.

Observație. Nu există unghi cu măsura mai mare de $180°$. Dacă suma măsurilor a două unghiuri depășește $180°$ (de exemplu, $105°25' + 92°50' = 198°15'$), rezultatul este un număr corect calculat, dar **nu** mai poate fi măsura unui unghi.

4. Scăderea măsurilor unghiurilor

Regula

Se scad între ele unitățile de același ordin. Dacă, la un anumit ordin, numărul de unități ale descăzutului este mai mic decât numărul de unități ale scăzătorului, **se împrumută** o unitate de ordin imediat superior, care se transformă în 60 de unități și se adaugă celor existente.

Exemplul 9. Scădere fără împrumut: $79°48' - 42°16'$.

$79°48' - 42°16' = (79° - 42°) + (48' - 16') = 37°32'$.

Exemplul 10. Scădere cu împrumut la minute: $64°12' - 18°37'$.

Pasul 1. Observăm că nu putem scădea $37'$ din $12'$.

Pasul 2. Împrumutăm $1°$ din $64°$ și îl transformăm în minute: $64°12' = 63° + 60' + 12' = 63°72'$.

Pasul 3. Scădem: $63°72' - 18°37' = (63° - 18°) + (72' - 37') = 45°35'$.

Exemplul 11. Descăzutul nu are minute: $162° - 97°43'$.

Pasul 1. Descăzutul are $0'$, deci împrumutăm $1°$: $162° = 161°60'$.

Pasul 2. Scădem: $161°60' - 97°43' = (161° - 97°) + (60' - 43') = 64°17'$.

Exemplul 12. Scădere cu împrumut la secunde și la minute: $52°18'29'' - 27°44'53''$**.**

Pasul 1. Atât la minute ($18' < 44'$), cât și la secunde ($29'' < 53''$), descăzutul are mai puține unități decât scăzătorul.

Pasul 2. Transformăm un grad al descăzutului în $59'60''$ (deoarece $1° = 60' = 59'60''$):

$$52°18'29'' = 51° \, (18 + 59)' \, (29 + 60)'' = 51°77'89''.$$

Pasul 3. Scădem pe coloane:

$$\begin{array}{r} 51°\,77'\,89'' - \\ 27°\,44'\,53'' \\ \hline 24°\,33'\,36'' \end{array}$$

Deci $52°18'29'' - 27°44'53'' = 24°33'36''$.

Verificare: $24°33'36'' + 27°44'53'' = 52°18'29''$ (se calculează ca în Exemplul 7).

Exemplul 13. Scăderea din $90°$ sau din $180°$: $90° - 48°26'15''$ și $180° - 67°38'44''$.

Pasul 1. Scriem descăzutul cu minute și secunde: $90° = 89°59'60''$, respectiv $180° = 179°59'60''$.

Pasul 2. Scădem pe ordine:

$$89°59'60'' - 48°26'15'' = 41°33'45'', \qquad 179°59'60'' - 67°38'44'' = 112°21'16''.$$

Acest tip de scădere apare frecvent în probleme, atunci când descăzutul este un număr întreg de grade.

5. Înmulțirea măsurii unui unghi cu un număr natural

Regula

Se înmulțesc cu numărul natural dat unitățile de fiecare ordin. Apoi, începând cu secundele, grupele de câte 60 de unități se transformă în unități de ordin imediat superior.

Exemplul 14. Înmulțire fără depășire: $23°16' \cdot 3$.

$23°16' \cdot 3 = (23° \cdot 3) + (16' \cdot 3) = 69°48'$.

Exemplul 15. Înmulțire cu depășire la minute: $27°38' \cdot 4$.

Pasul 1. $(27° \cdot 4) + (38' \cdot 4) = 108°152'$.

Pasul 2. $152' = 2 \cdot 60' + 32' = 2°32'$, deci rezultatul este $108° + 2° + 32' = 110°32'$.

Exemplul 16. Înmulțire cu depășire la secunde și la minute: $14°47'38'' \cdot 5$.

Pasul 1. Secundele: $38'' \cdot 5 = 190'' = 3 \cdot 60'' + 10''$. Scriem $10''$ și ținem în minte $3'$.

Pasul 2. Minutele: $47' \cdot 5 + 3' = 238' = 3 \cdot 60' + 58'$. Scriem $58'$ și ținem în minte $3°$.

Pasul 3. Gradele: $14° \cdot 5 + 3° = 73°$.

Deci $14°47'38'' \cdot 5 = 73°58'10''$.

Observație. Înmulțirea cu un număr natural înlocuiește adunarea repetată a aceleiași măsuri: $14°47'38'' \cdot 5 = 14°47'38'' + 14°47'38'' + 14°47'38'' + 14°47'38'' + 14°47'38''$.

6. Împărțirea măsurii unui unghi la un număr natural nenul

Regula

Se împarte mai întâi numărul de grade la numărul dat; câtul se exprimă în grade. Restul (dacă există) se transformă în minute și se adaugă la minutele existente; suma se împarte la numărul dat, iar câtul se exprimă în minute. Restul obținut la minute se transformă în secunde, se adaugă la secundele existente, iar suma se împarte la numărul dat.

Exemplul 17. Împărțire exactă la fiecare ordin: $72°48' : 4$.

$(72° : 4) + (48' : 4) = 18°12'$.

Exemplul 18. Rest la împărțirea gradelor: $35°52' : 4$.

Pasul 1. Gradele: $35 = 4 \cdot 8 + 3$, deci câtul este $8°$ și restul $3°$.

Pasul 2. Transformăm restul în minute și adunăm: $3° = 180'$, $180' + 52' = 232'$.

Pasul 3. Minutele: $232' : 4 = 58'$.

Deci $35°52' : 4 = 8°58'$.

Exemplul 19. Măsuri exprimate numai în grade: $155° : 4$ **și** $107° : 2$.

$155 = 4 \cdot 38 + 3$, deci $155° : 4 = 38° + (3° : 4) = 38° + (180' : 4) = 38°45'$;
$107 = 2 \cdot 53 + 1$, deci $107° : 2 = 53° + (60' : 2) = 53°30'$.

Exemplul 20. Împărțire cu grade, minute și secunde: $83°19'45'' : 3$.

Pasul 1. Gradele: $83 = 3 \cdot 27 + 2$; câtul $27°$, restul $2° = 120'$.

Pasul 2. Minutele: $120' + 19' = 139'$; $139 = 3 \cdot 46 + 1$; câtul $46'$, restul $1' = 60''$.

Pasul 3. Secundele: $60'' + 45'' = 105''$; $105'' : 3 = 35''$.

Deci $83°19'45'' : 3 = 27°46'35''$.

Exemplul 21. Împărțire care nu se termină exact: $29°40'11'' : 3$.

Pasul 1. Gradele: $29 = 3 \cdot 9 + 2$; câtul $9°$, restul $2° = 120'$.

Pasul 2. Minutele: $120' + 40' = 160'$; $160 = 3 \cdot 53 + 1$; câtul $53'$, restul $1' = 60''$.

Pasul 3. Secundele: $60'' + 11'' = 71''$; $71 = 3 \cdot 23 + 2$; câtul $23''$, restul $2''$.

Rezultatul nu este un număr întreg de secunde: $29°40'11'' : 3 = 9°53'23''$ și rest $2''$. Deoarece $71 : 3 \approx 23{,}67$, rotunjim la cea mai apropiată secundă și scriem

$$29°40'11'' : 3 \approx 9°53'24''.$$

Verificare. Împărțirea se verifică prin înmulțire: $27°46'35'' \cdot 3 = 83°19'45''$.

Greșeli frecvente

Atenție!

- 1° are 60 de minute, **nu** 100: $64^\circ 12' \neq 63^\circ 112'$, ci $64^\circ 12' = 63^\circ 72'$.
- O măsură scrisă corect nu are 60 sau mai multe minute (secunde): $147^\circ 82'$ se scrie $148^\circ 22'$. Totuși, scrierea cu 60 sau mai multe minute (secunde), de exemplu $63^\circ 72'$ sau $51^\circ 77' 89''$, este admisă doar în scop de transformare, ca etapă intermediară a calculului.
- La împrumut, din 1° obținem $60'$, iar din $1'$ obținem $60''$; de aceea $90^\circ = 89^\circ 59' 60''$ și $180^\circ = 179^\circ 59' 60''$.
- La împărțire, restul de la grade se transformă în minute **înainte** de a împărți minutele.
- Rezultatul unei adunări care depășește 180° nu este măsura unui unghi.