Capitolul II. Divizibilitatea numerelor naturale

Lecția 1. Recapitulare și completări

Divizor, multiplu (recapitulare)

Definiție

Fie a și b două numere naturale. Spunem că a **este divizibil cu** b (sau că a se divide cu b) și scriem $a \vdots b$ dacă există un număr natural c astfel încât $c \cdot b = a$.
Scriem echivalent $b \mid a$ și citim „b divide pe a”. În acest caz, b **se numește divizor al lui** a, iar a **se numește multiplu al lui** b.

$$a \vdots b \iff b \mid a \iff \text{există } c \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } c \cdot b = a$$

Exemple. $6 \vdots 3$, deoarece există $2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $2 \cdot 3 = 6$; $99 \vdots 11$, deoarece $9 \cdot 11 = 99$; $3 \mid 9$, $100 \mid 300$, $3 \mid 531$, $4 \mid 2\,940$.

Observații

Observația 1. Dacă nu există niciun număr natural c astfel încât $c \cdot b = a$, atunci a nu este divizibil cu b și scriem $a \not\vdots b$ (sau $b \nmid a$).

Exemple: $2\,026 \not\vdots 45$; $2 \not\vdots 5$; $100 \not\vdots 30$; $25 \not\vdots 0$.

Observația 2. $0 \vdots 0$, deoarece $c \cdot 0 = 0$ pentru orice $c \in \mathbb{N}$.

Observația 3. Dacă $b \neq 0$, atunci $a \vdots b$ dacă și numai dacă a se împarte exact la b (restul împărțirii lui a la b este 0).

Observația 4. Dacă $a = b \cdot c$, atunci b și c sunt amândoi divizori ai lui a, iar a este multiplu atât al lui b, cât și al lui c.

Observația 5. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $a \vdots b$, atunci $a \geq b$.

Observația 6. $0 \vdots n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (numărul 0 este multiplu al oricărui număr natural). Un număr natural nenul nu este divizibil cu 0.

Observația 7. $1 \mid a$ pentru orice $a \in \mathbb{N}$. Dacă $n \mid 1$, atunci $n = 1$.

Proprietățile relației de divizibilitate

1) **Reflexivitatea:** $a \vdots a$, pentru orice $a \in \mathbb{N}$.

2) **Antisimetria:** Dacă $a \vdots b$ și $b \vdots a$, atunci $a = b$.

3) **Tranzitivitatea:** Dacă $a \vdots b$ și $b \vdots c$, atunci $a \vdots c$.

Mulțimea divizorilor și mulțimea multiplilor unui număr natural

Notații

Fie $n \in \mathbb{N}$. Notăm cu D_n mulțimea divizorilor naturali ai lui n și cu $\mathcal{M}_n$ mulțimea multiplilor lui n:

$$D_n = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid n\}, \qquad \mathcal{M}_n = \{n \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0,\ n,\ 2n,\ 3n,\ \ldots\}.$$

Un multiplu oarecare al lui n (unul dintre elementele mulțimii $\mathcal{M}_n$) se notează cu M_n (literă dreaptă).

Exemple. Pentru a găsi divizorii unui număr, îl scriem în toate modurile posibile ca produs de două numere naturale:

- $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$, deci $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$;
- $18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$, deci $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$;
- $30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$, deci $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$;
- $50 = 1 \cdot 50 = 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10$, deci $D_{50} = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$;
- $D_1 = \{1\}$, $D_0 = \mathbb{N}$; $\mathcal{M}_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots\} = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Observații

Observația 8. $D_0 = \mathbb{N}$ este o mulțime infinită; dacă $n \neq 0$, atunci D_n este o mulțime finită.
$\mathcal{M}_0 = \{0\}$ este o mulțime finită; dacă $n \neq 0$, atunci $\mathcal{M}_n$ este o mulțime infinită.

Observația 9. Dacă $a \neq 0$ și $N \vdots a$, atunci N este multiplu al lui a, adică $N = \mathrm{M}_a$ sau $N \in \mathcal{M}_a$. *Exemplu:* $50 \vdots 10$, deci $50 = \mathrm{M}_{10}$ ($50 \in \mathcal{M}_{10}$).

Criterii de divizibilitate (recapitulare)

Pentru un număr natural n notăm: $u(n)$ – ultima cifră a lui n; $s(n)$ – suma cifrelor lui n; N_k – numărul format cu ultimele k cifre ale lui n.

Criterii de divizibilitate

$n \vdots 2 \iff u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$	$n \vdots 5 \iff u(n) \in \{0, 5\}$
$n \vdots 10 \iff u(n) = 0$	$n \vdots 10^k \iff n$ se termină cu k zerouri
$n \vdots 4 \iff N_2 \vdots 4$	$n \vdots 25 \iff N_2 \in \{00, 25, 50, 75\}$
$n \vdots 2^k \iff N_k \vdots 2^k$	$n \vdots 5^k \iff N_k \vdots 5^k$
$n \vdots 3 \iff s(n) \vdots 3$	$n \vdots 9 \iff s(n) \vdots 9$

Exemple. $5\,316 \vdots 4$, deoarece $16 \vdots 4$; $7\,125 \vdots 25$; $43\,128 \vdots 8$, deoarece $128 \vdots 8$; $2\,457 \vdots 9$, deoarece $2 + 4 + 5 + 7 = 18 \vdots 9$.

Numere prime, numere compuse (recapitulare)

Orice număr natural $n \geq 2$ are cel puțin doi divizori: 1 și n, numiți **divizori improprii**. Ceilalți divizori, dacă există, se numesc **divizori proprii**. *Exemplu:* divizorii improprii ai lui 12 sunt 1 și 12, iar divizorii proprii sunt $2, 3, 4, 6$.

Definiții

1) Un număr natural $p \geq 2$ care are doar divizori improprii (adică exact doi divizori naturali, 1 și p) se numește **număr prim**.
2) Un număr natural $n \geq 2$ care nu este prim se numește **număr compus**.

Mulțimea numerelor prime este $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$.

Observații

Observația 10. $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, este prim dacă și numai dacă $D_p = \{1, p\}$, adică card $D_p = 2$.
Observația 11. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este compus dacă și numai dacă card $D_n \geq 3$, adică dacă și numai dacă există $a, b \in \mathbb{N}$, $1 < a < n$, $1 < b < n$, astfel încât $n = a \cdot b$. *Exemplu:* 12 este compus, deoarece $12 = 3 \cdot 4$.
Observația 12. Numerele 0 și 1 nu sunt nici prime, nici compuse.
Observația 13. Singurul număr prim par este 2. Dacă $p \geq 3$ este prim, atunci p este impar.

Cum arătăm că un număr natural este prim

Algoritmul de verificare a primalității unui număr natural $n \geq 2$

1) Împărțim numărul n, pe rând, la numerele prime $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ (folosind criteriile de divizibilitate sau efectuând împărțirea).
2) Ne oprim atunci când câtul împărțirii este mai mic sau egal cu împărțitorul.
3) Dacă n nu se divide cu niciunul dintre aceste numere prime, atunci n este prim; dacă n se divide cu unul dintre ele, atunci n este compus.

Observații

Observația 14. Algoritmul este corect: dacă n ar fi compus, $n = a \cdot b$ cu $1 < a \leq b$, atunci $a \cdot a \leq a \cdot b = n$, deci n ar avea un divizor prim p cu $p \cdot p \leq n$, pe care l-am fi găsit.

Exemple.

- $n = 97$: $7 \cdot 7 = 49 \leq 97$, iar $11 \cdot 11 = 121 > 97$, deci verificăm numerele prime $2, 3, 5, 7$. $97 \not\vdots 2$ (97 este impar), $97 \not\vdots 3$ $(9 + 7 = 16)$, $97 \not\vdots 5$ $(u(97) = 7)$, $97 \not\vdots 7$ $(97 = 7 \cdot 13 + 6)$. Deci 97 este prim.
- $n = 211$: $13 \cdot 13 = 169 \leq 211$, iar $17 \cdot 17 = 289 > 211$, deci verificăm numerele prime $2, 3, 5, 7, 11, 13$. $211 \not\vdots 2$, $211 \not\vdots 3$ $(2 + 1 + 1 = 4)$, $211 \not\vdots 5$, $211 = 7 \cdot 30 + 1$, $211 = 11 \cdot 19 + 2$, $211 = 13 \cdot 16 + 3$. Deci 211 este prim.
- $n = 221$: $13 \cdot 13 = 169 \leq 221$; împărțind la $2, 3, 5, 7, 11$ obținem resturi nenule, dar $221 = 13 \cdot 17$, deci 221 este compus.

Teoremă (Euclid)

Mulțimea numerelor prime este infinită.

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că mulțimea numerelor prime este finită. Atunci ar exista un cel mai mare număr prim p, iar toate numerele prime ar fi $2 < 3 < 5 < 7 < \ldots < p$.

Considerăm numărul $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$. Împărțit la oricare dintre numerele prime $2, 3, 5, \ldots, p$, numărul N dă restul 1, deci N nu este divizibil cu niciunul dintre ele. Cel mai mic divizor al lui N, diferit de 1, este un număr prim (altfel ar avea un divizor mai mic, diferit de 1). Acest număr prim nu se află în lista $2, 3, 5, \ldots, p$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Prin urmare, presupunerea este falsă, iar mulțimea numerelor prime este infinită.

Exerciții rezolvate

A1. Stabiliți dacă numărul $A = 2^{2019} - 3$ este prim.

Rezolvare. Ultimele cifre ale puterilor lui 2 se repetă din 4 în 4: $2, 4, 8, 6$. Cum $2019 = 4 \cdot 504 + 3$, avem $u\left(2^{2019}\right) = u\left(2^3\right) = 8$, deci $u(A) = u(8-3) = 5$. Rezultă $A \vdots 5$ și, deoarece $A > 5$, numărul A nu este prim.

A2. Există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numerele n, $n+2$, $n+6$, $n+14$, $n+18$ și $n+20$ să fie simultan prime?

Rezolvare. Verificăm numerele prime mici:
$n = 2$: $2, 4, 8, 16, 20, 22$ — nu sunt toate prime;
$n = 3$: $3, 5, 9, 17, 21, 23$ — nu sunt toate prime;
$n = 5$: $5, 7, 11, 19, 23, 25$ — nu sunt toate prime.
Fie $n > 5$ prim. Atunci n nu este divizibil cu 5, deci n este de forma $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$ sau $5k+4$, $k \in \mathbb{N}^*$:

- $n = 5k + 1 \Rightarrow n + 14 = 5k + 15 = 5(k + 3) \vdots 5$;
- $n = 5k + 2 \Rightarrow n + 18 = 5k + 20 = 5(k + 4) \vdots 5$;
- $n = 5k + 3 \Rightarrow n + 2 = 5k + 5 = 5(k + 1) \vdots 5$;
- $n = 5k + 4 \Rightarrow n + 6 = 5k + 10 = 5(k + 2) \vdots 5$.

În fiecare caz, unul dintre numere este un multiplu al lui 5 mai mare decât 5, deci nu este prim. Așadar, nu există $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea cerută.

A3. Determinați mulțimile D_{36} și D_{100}.

Rezolvare. $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$, deci $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.
$100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10$, deci $D_{100} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$.

A4. Determinați numerele naturale x pentru care $12 \vdots (x + 1)$.

Rezolvare. $x + 1$ trebuie să fie divizor al lui 12, adică $x + 1 \in D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Rezultă $x \in \{0, 1, 2, 3, 5, 11\}$.

A5. Determinați cifra x astfel încât numărul $\overline{4x70}$ să fie divizibil cu 3.

Rezolvare. $\overline{4x70} \vdots 3 \iff (4 + x + 7 + 0) \vdots 3 \iff (11 + x) \vdots 3$. Cum x este cifră, $11 + x \in \{12, 15, 18\}$, deci $x \in \{1, 4, 7\}$. Numerele sunt 4 170, 4 470, 4 770.

A6. Câte numere naturale de trei cifre sunt divizibile cu 7?

Rezolvare. Cel mai mic multiplu de trei cifre al lui 7 este $105 = 7 \cdot 15$, iar cel mai mare este $994 = 7 \cdot 142$. Numerele căutate sunt $7 \cdot 15,\ 7 \cdot 16,\ \ldots,\ 7 \cdot 142$, adică $142 - 15 + 1 = 128$ de numere.

A7. Arătați că numărul $10^n + 8$ este divizibil cu 9, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare. $10^n + 8 = 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ zerouri}}8$, iar suma cifrelor este $1+8=9$. Din criteriul de divizibilitate cu 9 rezultă $(10^n + 8) \vdots 9$.

A8. Determinați numerele prime p pentru care $p + 10$ și $p + 20$ sunt, de asemenea, numere prime.

Rezolvare. Pentru $p = 2$: $p + 10 = 12$ nu este prim. Pentru $p = 3$: 13 și 23 sunt prime, deci $p = 3$ convine.
Dacă $p > 3$ este prim, atunci p nu este divizibil cu 3, deci $p = 3k + 1$ sau $p = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}^*$:

- $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 20 = 3k + 21 = 3(k + 7) \vdots 3$, iar $p + 20 > 3$, deci $p + 20$ nu este prim;
- $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 10 = 3k + 12 = 3(k + 4) \vdots 3$, iar $p + 10 > 3$, deci $p + 10$ nu este prim.

Singura soluție este $p = 3$.

A9. Se poate scrie numărul 2 027 ca sumă a două numere prime?

Rezolvare. Suma a două numere prime impare este pară. Cum 2 027 este impar, unul dintre numere trebuie să fie par, deci egal cu 2. Atunci celălalt ar fi 2 025, care nu este prim ($2\,025 \vdots 5$). Prin urmare, 2 027 nu se poate scrie ca sumă a două numere prime.

Exerciții propuse

1. Scrieți mulțimile D_{24}, D_{45}, D_{60} și primii cinci multipli nenuli ai lui 13.

2. Dintre numerele 1 236; 4 517; 7 290; 9 108; 2 025 alegeți pe cele divizibile cu: a) 2; b) 3; c) 5; d) 9; e) 4; f) 25.

3. Determinați cifra x astfel încât: a) $\overline{25x} \vdots 3$; b) $\overline{4x8} \vdots 9$; c) $\overline{7x6} \vdots 4$; d) $\overline{3x5} \vdots 25$.

4. Câte numere naturale de două cifre sunt divizibile cu 6?

5. Determinați numerele naturale x pentru care $18 \vdots (x + 2)$.

6. Folosind algoritmul de verificare a primalității, stabiliți care dintre numerele următoare sunt prime: 89; 91; 119; 127; 143; 157.

7. Arătați că numărul $2^{2026} + 1$ este compus.

8. Arătați că numărul $10^{2026} + 8$ este divizibil atât cu 2, cât și cu 3.

9. Diferența a două numere prime este 15. Determinați cele două numere.

10. Determinați numerele prime a și b știind că $3a + 5b = 31$.

11. Determinați numerele prime p pentru care $p + 4$ și $p + 8$ sunt, de asemenea, numere prime.

12. Arătați că produsul a două numere naturale consecutive este divizibil cu 2.

Răspunsuri

1. $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$; $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$; $D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$; $13, 26, 39, 52, 65$.

2. a) 1 236; 7 290; 9 108; b) 1 236; 7 290; 9 108; 2 025; c) 7 290; 2 025; d) 7 290; 9 108; 2 025; e) 1 236; 9 108; f) 2 025.

3. a) $x \in \{2, 5, 8\}$; b) $x = 6$; c) $x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$; d) $x \in \{2, 7\}$.

4. 15.

5. $x \in \{0, 1, 4, 7, 16\}$.

6. Prime: 89, 127, 157; $91 = 7 \cdot 13$, $119 = 7 \cdot 17$, $143 = 11 \cdot 13$.

7. $u\left(2^{2026}\right) = 4$, deci $u\left(2^{2026} + 1\right) = 5$; numărul este divizibil cu 5 și mai mare decât 5.

8. Ultima cifră este 8, iar suma cifrelor este 9.

9. 17 și 2.

10. $a = 7,\ b = 2$ sau $a = 2,\ b = 5$.

11. $p = 3$.

12. Dintre n și $n + 1$, unul este par.