Capitolul II. Divizibilitatea numerelor naturale

Lecția 2. Descompunerea în factori primi a unui număr natural

Teorema fundamentală a aritmeticii

Orice număr natural $n \geq 2$ se poate scrie ca produs de puteri de numere prime:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

unde $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ sunt numere prime, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$.
Această scriere se numește **descompunerea în factori primi** (forma canonică) a numărului n și este unică, dacă facem abstracție de ordinea factorilor.

Algoritmul de descompunere în factori primi

1) Împărțim numărul la cel mai mic divizor prim al său și scriem câtul sub număr.
2) Împărțim câtul obținut la cel mai mic divizor prim al său.
3) Continuăm până obținem câtul 1, apoi scriem numărul ca produs de puteri de numere prime.

Exemple.

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

210	2
105	3
35	5
7	7
1	

4 845	3
1 615	5
323	17
19	19
1	

$72 = 2^3 \cdot 3^2$; $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $4\,845 = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$.

Observații

Observația 1. La descompunerea în factori primi se aplică criteriile de divizibilitate.
Observația 2. Pentru numerele care se termină cu zerouri folosim $10^k = 2^k \cdot 5^k$. *Exemple:* $280 = 28 \cdot 10 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$; $36\,000 = 36 \cdot 10^3 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$.
Observația 3. Dacă un număr natural este divizibil cu două numere prime diferite, atunci el este divizibil și cu produsul lor. *Exemplu:* dacă $n \vdots 2$ și $n \vdots 3$, atunci $n \vdots 6$.

Numărul divizorilor unui număr natural

Dacă p este număr prim, atunci: $D_p = \{1, p\}$, deci $\operatorname{card} D_p = 2$; $D_{p^2} = \{1, p, p^2\}$, deci $\operatorname{card} D_{p^2} = 3$;
$D_{p^3} = \{1, p, p^2, p^3\}$, deci $\operatorname{card} D_{p^3} = 4$; în general, $D_{p^k} = \{1, p, p^2, \ldots, p^k\}$, deci $\operatorname{card} D_{p^k} = k + 1$.

Dacă p și q sunt numere prime diferite, divizorii lui $p^2 \cdot q^3$ se obțin înmulțind fiecare divizor al lui p^2 cu fiecare divizor al lui q^3:

$\cdot$	1	p	p^2
1	1	p	p^2
q	q	$q \cdot p$	$q \cdot p^2$
q^2	q^2	$q^2 \cdot p$	$q^2 \cdot p^2$
q^3	q^3	$q^3 \cdot p$	$q^3 \cdot p^2$

$\Rightarrow \qquad \operatorname{card} D_{p^2 \cdot q^3} = 3 \cdot 4 = 12.$

Teoremă

Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ este descompunerea în factori primi a numărului $n \geq 2$, atunci numărul divizorilor naturali ai lui n este

$$\operatorname{card} D_n = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Exemple. $72 = 2^3 \cdot 3^2$, deci $\operatorname{card} D_{72} = (3 + 1) \cdot (2 + 1) = 4 \cdot 3 = 12$. Într-adevăr, $D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.

Completări. Pentru $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$:

- suma divizorilor naturali ai lui n este $\sigma(n) = \dfrac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \dfrac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$;
  Exemplu: $\sigma(72) = \dfrac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \dfrac{3^3 - 1}{3 - 1} = 15 \cdot 13 = 195 = 1+2+3+4+6+8+9+12+18+24+36+72$;
- dacă $\pi(n)$ este produsul tuturor divizorilor naturali ai lui n, atunci $\pi^2(n) = n^{\operatorname{card} D_n}$;
  Exemplu: $\pi(72) = 2^{18} \cdot 3^{12}$, iar $\pi^2(72) = 2^{36} \cdot 3^{24} = (2^3 \cdot 3^2)^{12} = 72^{12}$.

Pătrate perfecte și cuburi perfecte

Observații

Observația 4. Un număr natural $n \geq 2$ este **pătrat perfect** dacă și numai dacă, în descompunerea sa în factori primi, toți exponenții sunt numere pare.
Observația 5. Un număr natural $n \geq 2$ este **cub perfect** dacă și numai dacă, în descompunerea sa în factori primi, toți exponenții sunt multipli de 3.

Exemple. $784 = 2^4 \cdot 7^2 = (2^2 \cdot 7)^2 = 28^2$ este pătrat perfect; $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3 = 10^3$ este cub perfect, dar nu este pătrat perfect.

Exerciții rezolvate

A1. Descompuneți în factori primi numerele 360; 1 008; 2 700; 9 801.

Rezolvare.

360	2	1 008	2	2 700	2	9 801	3
180	2	504	2	1 350	2	3 267	3
90	2	252	2	675	3	1 089	3
45	3	126	2	225	3	363	3
15	3	63	3	75	3	121	11
5	5	21	3	25	5	11	11
1		7	7	5	5	1	
		1		1			

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $1\,008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$; $2\,700 = 27 \cdot 10^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; $9\,801 = 3^4 \cdot 11^2$.

A2. Folosind descompunerea în factori primi, stabiliți care dintre numerele 3 600, 9 801 și 1 008 sunt pătrate perfecte.

Rezolvare. $3\,600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 60^2$ — pătrat perfect; $9\,801 = 3^4 \cdot 11^2 = (3^2 \cdot 11)^2 = 99^2$ — pătrat perfect; $1\,008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ — nu este pătrat perfect, deoarece exponentul lui 7 este impar.

A3. Determinați cel mai mic număr natural nenul cu care trebuie înmulțit 360 pentru a obține un pătrat perfect.

Rezolvare. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Pentru ca toți exponenții să devină pari, înmulțim cu $2 \cdot 5 = 10$: $360 \cdot 10 = 3\,600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 60^2$. Numărul căutat este 10.

A4. Descompuneți în factori primi numărul $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$.

Rezolvare. $S = \dfrac{100 \cdot 101}{2} = 5\,050 = 2 \cdot 5^2 \cdot 101$ (101 este prim).

A5. Câți divizori naturali are numărul $n = 2^5 \cdot 3^4$? Câți dintre ei sunt divizori proprii?

Rezolvare. $\operatorname{card} D_n = (5+1) \cdot (4+1) = 30$. Divizorii improprii sunt 1 și n, deci n are $30 - 2 = 28$ de divizori proprii.

A6. Determinați cel mai mic număr natural care are exact 6 divizori.

Rezolvare. Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, atunci $(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1) = 6$. Avem două posibilități:

- $6 = 6$: $n = p^5$; cel mai mic este $2^5 = 32$;
- $6 = 2 \cdot 3$: $n = p \cdot q^2$, cu $p \neq q$ prime; cel mai mic este $3 \cdot 2^2 = 12$.

Cel mai mic număr cu exact 6 divizori este 12 ($D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$).

Exerciții propuse

1. Descompuneți în factori primi numerele: 96; 225; 504; 1 400; 3 375; 10 800.

2. Stabiliți care dintre numerele următoare sunt pătrate perfecte și care sunt cuburi perfecte: 1 764; 2 025; 1 728; 4 900; 5 832.

3. Determinați cel mai mic număr natural nenul cu care trebuie înmulțit 540 pentru a obține un pătrat perfect.

4. Determinați cel mai mic număr natural nenul cu care trebuie înmulțit 72 pentru a obține un cub perfect.

5. Câți divizori naturali au numerele: 48; 180; 1 000; $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$?

6. Descompuneți în factori primi numărul 90 și scrieți mulțimea D_{90} folosind un tabel ca cel din lecție.

7. Descompuneți în factori primi numerele $a = 2^{10} + 2^{12}$ și $b = 3^{20} - 3^{18}$.

8. Determinați cel mai mic număr natural care are exact 9 divizori.

9. Determinați numerele naturale de forma $n = 2^x \cdot 3^y$ care au 12 divizori, sunt divizibile cu 27, dar nu sunt divizibile cu 8.

10. Calculați suma divizorilor naturali ai numărului 36.

Răspunsuri

1. $96 = 2^5 \cdot 3$; $225 = 3^2 \cdot 5^2$; $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$; $1\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$; $3\,375 = 3^3 \cdot 5^3$; $10\,800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

2. Pătrate perfecte: $1\,764 = 42^2$, $2\,025 = 45^2$, $4\,900 = 70^2$; cuburi perfecte: $1\,728 = 12^3$, $5\,832 = 18^3$.

3. 15 ($540 \cdot 15 = 8\,100 = 90^2$).

4. 3 ($72 \cdot 3 = 216 = 6^3$).

5. 10; 18; 16; 40.

6. $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $D_{90} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$.

7. $a = 2^{10} \cdot 5$; $b = 2^3 \cdot 3^{18}$.

8. 36.

9. 3^{11}; $2 \cdot 3^5 = 486$; $2^2 \cdot 3^3 = 108$.

10. 91.