Capitolul II. Divizibilitatea numerelor naturale

Lecția 3. Cel mai mare divizor comun. Numere prime între ele

Recapitulare și completări

A1. Fie $a = 12$ și $b = 18$. a) Descompuneți în factori primi numerele a și b. b) Determinați $\operatorname{card} D_{12}$ și $\operatorname{card} D_{18}$. c) Determinați mulțimile D_{12} și D_{18}. d) Determinați cel mai mare element al mulțimii $D_{12} \cap D_{18}$.

Rezolvare. a)
$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 12 = 2^2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2.$$

b) $\operatorname{card} D_{12} = (2+1) \cdot (1+1) = 6$; $\operatorname{card} D_{18} = (1+1) \cdot (2+1) = 6$.

c) $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

d) $D_{12} \cap D_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$ este mulțimea divizorilor comuni ai numerelor 12 și 18. Cel mai mare element al ei este 6; acesta este cel mai mare divizor comun al numerelor 12 și 18.

Cel mai mare divizor comun

Definiția 1

Fie $a, b \in \mathbb{N}$, nu ambele nule. Cel mai mare număr natural care îl divide atât pe a, cât și pe b se numește **cel mai mare divizor comun** (c.m.m.d.c.) al numerelor a și b și se notează (a, b).

Definiția 2

Fie $a, b \in \mathbb{N}$, nu ambele nule. Cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este numărul natural d care îndeplinește condițiile:

a) $d \mid a$ și $d \mid b$ (d este un divizor comun al celor două numere);

b) dacă $d' \in \mathbb{N}$, $d' \mid a$ și $d' \mid b$, atunci $d' \mid d$ (d este divizibil cu toți divizorii comuni).

Observații

Observația 1. Definiția se extinde la trei sau mai multe numere naturale; c.m.m.d.c. al numerelor a, b, c se notează (a, b, c).
Observația 2. Orice divizor comun a două sau mai multe numere naturale este un divizor al celui mai mare divizor comun al lor.
Observația 3. $(1, a) = 1$ și $(a, a) = a$, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.
Observația 4. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $a \mid b$, atunci $(a, b) = a$ (deoarece $D_a \subset D_b$, deci $D_a \cap D_b = D_a$).
Observația 5. $(0, a) = a$, pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$ (deoarece $D_0 = \mathbb{N}$, deci $D_0 \cap D_a = D_a$, al cărei cel mai mare element este a).
Observația 6. Dacă p și q sunt numere prime diferite, atunci $(p, q) = 1$.

Determinarea c.m.m.d.c. prin descompunere în factori primi

Etape

1) Descompunem numerele în factori primi.
2) Identificăm factorii primi comuni.
3) Aplicăm regula: c.m.m.d.c. este produsul factorilor primi comuni, luați o singură dată, la puterea cea mai mică.
4) Dacă numerele nu au factori primi comuni, atunci c.m.m.d.c. al lor este 1.

A2. Determinați $(84, 112)$.

Rezolvare.

84	2	112	2
42	2	56	2
21	3	28	2
7	7	14	2
1		7	7
		1	

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 112 = 2^4 \cdot 7.$

Factorii primi comuni sunt 2 și 7, deci $(84, 112) = 2^2 \cdot 7 = 28$.

A3. Fie $a = 120$ și $b = 105$. Calculați $d = (a, b)$ și $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$.

Rezolvare. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Factorii primi comuni sunt 3 și 5, deci $d = (120, 105) = 3 \cdot 5 = 15$. Apoi $120 : 15 = 8$, $105 : 15 = 7$ și $(8, 7) = 1$.

A4. Fie $a = 144$ și $b = 156$. Calculați $d = (a, b)$ și $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$. Ce observați?

Rezolvare. $144 = 2^4 \cdot 3^2, \quad 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$. Factorii primi comuni sunt 2 și 3, deci $d = (144, 156) = 2^2 \cdot 3 = 12$. Apoi $144 : 12 = 12$, $156 : 12 = 13$ și $(12, 13) = 1$.

Propoziție

Fie $a, b \in \mathbb{N}$, nu ambele nule. Dacă $d = (a, b)$, atunci există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$a = d \cdot x, \qquad b = d \cdot y, \qquad (x, y) = 1.$$

Numere prime între ele

Definiție

Două sau mai multe numere naturale se numesc **prime între ele** (relativ prime, coprime) dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

$$x \text{ și } y \text{ sunt prime între ele} \iff (x, y) = 1 \iff D_x \cap D_y = \{1\}$$

Exemple. $(5, 7) = 1$; $(109, 29) = 1$; $(1, 11) = 1$; $(2, 3) = 1$; $(123, 124) = 1$; $(9, 7) = 1$; $(4, 9) = 1$.

Observații

Observația 7. Oricare două numere prime diferite sunt prime între ele: $(p_1, p_2) = 1$; mai mult, $(p_1^m, p_2^n) = 1$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

Observația 8. Două numere prime între ele nu trebuie să fie numere prime. *Exemplu:* 4 și 9 nu sunt prime, dar $(4, 9) = 1$.
Observația 9. Oricare două numere naturale consecutive sunt prime între ele: $(n, n+1) = 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Justificare: dacă $d \mid n$ și $d \mid n+1$, atunci $d \mid (n+1) - n$, adică $d \mid 1$, deci $d = 1$.
Observația 10. Dacă $x \in \mathbb{N}^*$ și p este prim, atunci $(x, p) = 1 \iff p \nmid x$.
Observația 11. Numerele x și y sunt prime între ele dacă și numai dacă x nu se divide cu niciun factor prim din descompunerea lui y.
Exemple: $(a, 2) = 1 \iff a \not\vdots 2$; $(a, 6) = 1 \iff a \not\vdots 2$ și $a \not\vdots 3$; $(a, 10) = 1 \iff a \not\vdots 2$ și $a \not\vdots 5$.
Observația 12. Dacă $b \mid a$, $c \mid a$ și $(b, c) = 1$, atunci $b \cdot c \mid a$. *Exemplu:* $a \vdots 15 \iff a \vdots 3$ și $a \vdots 5$, deoarece $15 = 3 \cdot 5$ și $(3, 5) = 1$.

Exerciții rezolvate

A5. Determinați cifra x astfel încât $(\overline{97x}, 120) = 1$.
Rezolvare. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, deci $(\overline{97x}, 120) = 1 \iff 2 \nmid \overline{97x}$, $3 \nmid \overline{97x}$ și $5 \nmid \overline{97x}$.

- $2 \nmid \overline{97x} \iff x \notin \{0, 2, 4, 6, 8\}$;
- $5 \nmid \overline{97x} \iff x \notin \{0, 5\}$;
- $3 \nmid \overline{97x} \iff 3 \nmid (16 + x) \iff x \notin \{2, 5, 8\}$.

Rezultă $x \in \{1, 3, 7, 9\}$.

A6. Numerele 433 și 617, împărțite la același număr natural n, dau resturile 8, respectiv 5. Determinați numărul n.
Rezolvare. Aplicăm teorema împărțirii cu rest:

$$433 = n \cdot c_1 + 8,\ 8 < n \ \Rightarrow\ 425 = n \cdot c_1 \ \Rightarrow\ n \mid 425;$$
$$617 = n \cdot c_2 + 5,\ 5 < n \ \Rightarrow\ 612 = n \cdot c_2 \ \Rightarrow\ n \mid 612.$$

Deci n este un divizor comun al numerelor 425 și 612, adică $n \mid (425, 612)$.

425	5
85	5
17	17
1	

612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
1	

$425 = 5^2 \cdot 17$, $612 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$, deci $(425, 612) = 17$.

Din $n \mid 17$ și $n > 8$ rezultă $n = 17$.

A7. Determinați numerele naturale a și b știind că $(a, b) = 6$ și $a + b = 72$.
Rezolvare. Din $(a, b) = 6$ rezultă că există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = 6x$, $b = 6y$ și $(x, y) = 1$.

$$a + b = 72 \Rightarrow 6x + 6y = 72 \Rightarrow 6(x + y) = 72 \Rightarrow x + y = 12.$$

Perechile de numere prime între ele cu suma 12 sunt: $x = 1,\ y = 11$ și $x = 5,\ y = 7$ (și invers). Obținem $a = 6,\ b = 66$ sau $a = 30,\ b = 42$ (și invers).

A8. Calculați $(72, 108, 180)$.

Rezolvare. $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $108 = 2^2 \cdot 3^3$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Factorii primi comuni tuturor celor trei numere sunt 2 și 3, deci $(72, 108, 180) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.

A9. Simplificați fracția $\dfrac{126}{294}$ până când devine ireductibilă.

Rezolvare. $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$, deci $(126, 294) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ și $\dfrac{126}{294} = \dfrac{126 : 42}{294 : 42} = \dfrac{3}{7}$.

A10. O florăreasă are 84 de trandafiri și 126 de lalele. Ea vrea să facă cât mai multe buchete identice, folosind toate florile. Câte buchete face și ce conține fiecare?

Rezolvare. Numărul buchetelor trebuie să fie divizor comun al numerelor 84 și 126, iar pentru a fi cât mai mare este $(84, 126)$. $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, deci $(84, 126) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$. Florăreasa face 42 de buchete, fiecare cu $84 : 42 = 2$ trandafiri și $126 : 42 = 3$ lalele.

A11. O placă dreptunghiulară cu dimensiunile de 120 cm și 84 cm se taie în pătrate egale, cât mai mari, fără să rămână resturi. Determinați latura unui pătrat și numărul pătratelor.

Rezolvare. Latura pătratului trebuie să dividă atât 120, cât și 84 și să fie cât mai mare, deci este $(120, 84)$. $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, deci $(120, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12$ cm. Pe lungime încap $120 : 12 = 10$ pătrate, iar pe lățime $84 : 12 = 7$ pătrate, deci în total $10 \cdot 7 = 70$ de pătrate.

A12. Arătați că fracția $\dfrac{n+3}{n+4}$ este ireductibilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. Numerele $n + 3$ și $n + 4$ sunt consecutive, deci $(n + 3, n + 4) = 1$, iar fracția este ireductibilă.

Exerciții propuse

1. Calculați: a) $(48, 72)$; b) $(90, 150)$; c) $(126, 210)$; d) $(240, 360, 600)$; e) $(35, 64)$.

2. Simplificați fracțiile până când devin ireductibile: $\dfrac{84}{126}$; $\dfrac{180}{252}$; $\dfrac{315}{525}$.

3. Care dintre perechile următoare sunt formate din numere prime între ele: $(14, 25)$; $(21, 35)$; $(27, 64)$; $(39, 91)$; $(100, 101)$?

4. Determinați cifra x astfel încât $(\overline{2x5}, 6) = 1$.

5. Numerele 245 și 363, împărțite la același număr natural n, dau resturile 5, respectiv 3. Determinați valorile posibile ale lui n.

6. Determinați numerele naturale a și b știind că $(a, b) = 12$ și $a + b = 96$.

7. Determinați numerele naturale a și b știind că $(a, b) = 8$ și $a \cdot b = 1\,536$.

8. Un librar are 96 de caiete și 120 de pixuri, pe care vrea să le împartă în pachete identice, cât mai multe, folosind toate obiectele. Câte pachete face și ce conține fiecare?

9. O curte dreptunghiulară cu dimensiunile de 180 dm și 132 dm se pavează cu dale pătrate identice, cât mai mari, fără a tăia dale. Determinați latura unei dale și numărul de dale folosite.

10. Arătați că fracția $\dfrac{n+5}{n+6}$ este ireductibilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Răspunsuri

1. a) 24; b) 30; c) 42; d) 120; e) 1.

2. $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{5}$.

3. $(14, 25)$; $(27, 64)$; $(100, 101)$.

4. $x \in \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9\}$.

5. $n \mid (240, 360) = 120$ și $n > 5$: $n \in \{6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$.

6. $a = 12,\ b = 84$ sau $a = 36,\ b = 60$ (și invers).

7. $a = 8,\ b = 192$ sau $a = 24,\ b = 64$ (și invers).

8. 24 de pachete, fiecare cu 4 caiete și 5 pixuri.

9. Latura 12 dm; $15 \cdot 11 = 165$ de dale.

10. $n + 5$ și $n + 6$ sunt numere consecutive.