

Raționalizarea Numitorilor Frațiilor

Ghid Metodic cu Modele de Exerciții Rezolvate și Explicate Pas cu Pas

Breviar Teoretic și Formule Fundamentale

Raționalizarea numitorului unei fracții reprezintă procedeul algebric prin care se elimină radicalii de la numitor, obținând o fracție echivalentă al cărei numitor este un număr rațional.

Formule Fundamentale de Raționalizare

1. Radicali de ordinul n ($n \geq 2$):

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}, \quad \text{pentru } 1 \leq k < n, a > 0.$$

2. Conjugatul de ordinul 2 (diferență de pătrate):

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \implies \frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b}.$$

3. Identități pentru radicali cubici ($A^3 \pm B^3$):

$$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3 \quad \text{și} \quad (A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3.$$

4. Identități de ordin superior ($A^5 - B^5$):

$$(A-B)(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4) = A^5 - B^5.$$

Modulul I: Radicali de Ordinul n la Numitor

Model 1.1 – Radical pătratic simplu la numitor

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{5}{\sqrt{10}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Identificarea factorului de amplificare:** Numitorul conține $\sqrt{10}$ (ordinul 2). Factorul de amplificare este $\sqrt{10}$.

2. **Amplificarea fracției:**

$$\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10}.$$

3. **Simplificarea rezultatului:** Simplificăm 5 și 10 prin 5:

$$\frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Model 1.2 – Radical cubic dintr-o putere

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Scrierea ca putere:** Observăm că $9 = 3^2$, deci numitorul este $\sqrt[3]{3^2}$.
2. **Calculul exponentului complementar:** Ordinul este $n = 3$, exponentul curent este $k = 2$. Efectuăm amplificarea cu $\sqrt[3]{3^{3-2}} = \sqrt[3]{3^1} = \sqrt[3]{3}$.
3. **Amplificarea și simplificarea:**

$$\frac{3}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{3} = \sqrt[3]{3}.$$

Model 1.3 – Radical de ordin impar dintr-un număr negativ

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{21}{\sqrt[5]{-128}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Scoaterea minusului și descompunerea:** Deoarece ordinul 5 este impar, $\sqrt[5]{-128} = -\sqrt[5]{128}$. Descompunem $128 = 2^7 = 2^5 \cdot 2^2$.
2. **Scoaterea factorilor de sub radical:** $\sqrt[5]{2^7} = 2\sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$. Frația devine $-\frac{21}{2\sqrt[5]{4}}$.
3. **Amplificarea:** Pentru $\sqrt[5]{2^2}$, mai avem nevoie de $2^{5-2} = 2^3 = 8$. Amplificăm cu $\sqrt[5]{8}$:

$$-\frac{21 \cdot \sqrt[5]{8}}{2\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = -\frac{21\sqrt[5]{8}}{2 \cdot 2} = -\frac{21\sqrt[5]{8}}{4}.$$

Model 1.4 – Radical de ordinul 4 și scoaterea factorilor

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{36}{\sqrt[4]{48}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Descompunerea și simplificarea radicalului:** $48 = 2^4 \cdot 3 \implies \sqrt[4]{48} = 2\sqrt[4]{3}$.

2. **Fracția intermediară:** $\frac{36}{2\sqrt[4]{3}} = \frac{18}{\sqrt[4]{3}}$.

3. **Amplificarea:** Pentru $\sqrt[4]{3^1}$, factorul necesar este $\sqrt[4]{3^{4-1}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$.

4. **Calculul final:**

$$\frac{18 \cdot \sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}} = \frac{18\sqrt[4]{27}}{3} = 6\sqrt[4]{27}.$$

Model 1.5 – Reducerea ordinului radicalului

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{6}{\sqrt[9]{8}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Simplificarea exponentului cu ordinul:** $8 = 2^3 \implies \sqrt[9]{8} = \sqrt[9]{2^3} = 2^{3/9} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$.

2. **Amplificarea cu radicalul cubic complementar:** Pentru $\sqrt[3]{2^1}$, amplificăm cu $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$.

3. **Rezultat:**

$$\frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{6\sqrt[3]{4}}{2} = 3\sqrt[3]{4}.$$

Modulul II: Conjugatul de Ordinul 2

Model 2.1 – Conjugatul de forma $a + \sqrt{b}$

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{1}{3 + \sqrt{5}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Identificarea conjugatului:** Conjugatul expresiei $3 + \sqrt{5}$ este $3 - \sqrt{5}$.

2. **Amplificarea fracției:**

$$\frac{1}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1 \cdot (3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}.$$

3. **Aplicarea formulei** $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$:

$$\text{Numitor} = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4.$$

4. **Rezultat final:** $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$.

Model 2.2 – Conjugatul cu coeficient în fața radicalului

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{1}{4 + 3\sqrt{2}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Conjugatul:** Amplificăm cu $4 - 3\sqrt{2}$.

2. **Calculul numitorului:**

$$(4 + 3\sqrt{2})(4 - 3\sqrt{2}) = 4^2 - (3\sqrt{2})^2 = 16 - (9 \cdot 2) = 16 - 18 = -2.$$

3. **Așezarea minusului la numărător:**

$$\frac{4 - 3\sqrt{2}}{-2} = \frac{-(4 - 3\sqrt{2})}{2} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2}.$$

Model 2.3 – Diferență de doi radicali pătratici

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{6}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Conjugatul:** Amplificăm cu $\sqrt{7} + \sqrt{3}$.

2. **Calculul numitorului:** $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3 = 4$.

3. **Simplificarea fracției:**

$$\frac{6(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{2}.$$

Model 2.4 – Combinat: coeficient și doi radicali

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{5}{3\sqrt{2} - \sqrt{13}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Conjugatul:** Amplificăm cu $3\sqrt{2} + \sqrt{13}$.
2. **Calculul numitorului:** $(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{13})^2 = (9 \cdot 2) - 13 = 18 - 13 = 5$.
3. **Simplificarea numărătorului cu numitorul:**

$$\frac{5(3\sqrt{2} + \sqrt{13})}{5} = 3\sqrt{2} + \sqrt{13}.$$

Modulul III: Radicali Cubici și Expresii Algebrice

Model 3.1 – Numitor de forma $\sqrt[3]{a} - b$

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - 1}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Identitatea utilizată:** $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.
2. **Alegerea termenilor:** Fie $A = \sqrt[3]{3}$ și $B = 1$.
3. **Factorul de amplificare:** $A^2 + AB + B^2 = (\sqrt[3]{3})^2 + \sqrt[3]{3} \cdot 1 + 1^2 = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1$.
4. **Calculul numitorului:**

$$(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 - 1^3 = 3 - 1 = 2.$$

5. **Rezultat final:** $\frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}{2}$.

Model 3.2 – Numitor de forma $\sqrt[3]{a} + b$

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{6}{\sqrt[3]{7} + 1}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Identitatea utilizată:** $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$.
2. **Factorul de amplificare:** Pentru $A = \sqrt[3]{7}$ și $B = 1$, amplificăm cu $A^2 - AB + B^2 = \sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1$.
3. **Calculul numitorului:** $(\sqrt[3]{7} + 1)(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1) = (\sqrt[3]{7})^3 + 1^3 = 7 + 1 = 8$.
4. **Simplificarea:**

$$\frac{6(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1)}{8} = \frac{3(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{7} + 1)}{4}.$$

Model 3.3 – Factor comun sub radicalii cubici

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{1}{\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{15}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Factorizarea numitorului:** $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{5 \cdot 8} = 2\sqrt[3]{5}$, iar $\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{5 \cdot 3} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{3}$.
2. **Scoaterea factorului comun:** Numitorul devine $\sqrt[3]{5}(2 - \sqrt[3]{3})$.
3. **Raționalizarea în două etape:**

- Amplificăm mai întâi cu $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$, pentru a elimina $\sqrt[3]{5}$: obținem $\frac{\sqrt[3]{25}}{5(2 - \sqrt[3]{3})}$.
- Amplificăm apoi cu $2^2 + 2\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2 = 4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$:

$$(2 - \sqrt[3]{3})(4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 2^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = 8 - 3 = 5.$$

4. **Rezultat final:**

$$\frac{\sqrt[3]{25}(4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})}{5 \cdot 5} = \frac{\sqrt[3]{25}(4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})}{25}.$$

Model 3.4 – Expresie algebrică cu parametru sub radical

Cerință: Să se aducă la o formă raționalizată expresia: $\sqrt{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a-b}}$, unde $a > b > 0$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Raționalizarea sub radicalul mare:** Amplificăm fracția de sub radical cu $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}.$$

2. **Extragerea de sub radical:**

$$\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}} = \frac{|\sqrt{a}-\sqrt{b}|}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}} \quad (\text{deoarece } a > b \implies \sqrt{a} > \sqrt{b}).$$

3. **Înmulțirea cu al doilea termen:**

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a-b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

Modulul IV: Tehnici Avansate și Numitori Complecși

Model 4.1 – Numitor cu 3 termeni

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Gruparea termenilor:** Privim numitorul ca $[(\sqrt{3}-\sqrt{2})-1]$.

2. **Prima amplificare, cu conjugatul $[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+1]$:**

$$\begin{aligned} \text{Numitor}_1 &= [(\sqrt{3}-\sqrt{2})-1][(\sqrt{3}-\sqrt{2})+1] = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 - 1^2. \\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 - 1 &= (3-2\sqrt{6}+2) - 1 = 5-1-2\sqrt{6} = 4-2\sqrt{6} = 2(2-\sqrt{6}). \end{aligned}$$

3. **A doua amplificare, cu conjugatul $2+\sqrt{6}$:**

$$\text{Numitor}_2 = 2(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6}) = 2(4-6) = 2(-2) = -4.$$

4. **Finalizarea calculului numărătorului și simplificarea cu -4 .**

Model 4.2 – Numitor cu 4 termeni și factorizare

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Descompunerea în factori prin grupare:**

$$(\sqrt{5} - \sqrt{10}) - (\sqrt{3} - \sqrt{6}) = \sqrt{5}(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(1 - \sqrt{2}) = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(1 - \sqrt{2}).$$

2. **Raționalizarea independentă a celor doi factori:** Amplificăm cu $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2})$.

3. **Calculul numitorului:**

$$[(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})] \cdot [(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})] = (5 - 3)(1 - 2) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

4. **Rezultat final:** $-\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2})}{2}$.

Model 4.3 – Recunoașterea formei $A^2 - AB + B^2$

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{\sqrt[3]{9} - 1}{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{9} + 1}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Identificarea structurii:** Notăm $A = \sqrt[3]{9}$ și $B = 1$. Observăm că $A^2 = (\sqrt[3]{9})^2 = \sqrt[3]{81}$.

2. **Recunoașterea factorului dintr-o sumă de cuburi:** Numitorul este $A^2 - AB + B^2$.

3. **Amplificarea cu $A + B = \sqrt[3]{9} + 1$:**

$$\text{Numitor} = (A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3 = (\sqrt[3]{9})^3 + 1^3 = 9 + 1 = 10.$$

4. **Calculul numărătorului:** $(\sqrt[3]{9} - 1)(\sqrt[3]{9} + 1) = (\sqrt[3]{9})^2 - 1^2 = \sqrt[3]{81} - 1$.

5. **Rezultat final:** $\frac{\sqrt[3]{81} - 1}{10}$.

Model 4.4 – Radicali de ordine diferite la numitor

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{6}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{3}}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Aducerea la același ordin (ordinul 6):** $\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$, iar $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$.
2. **Substituția algebrică:** Fie $x = \sqrt[6]{3} \implies \sqrt{3} = x^3$ și $\sqrt[3]{3} = x^2$.
3. **Factorizarea numitorului:** $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) = \sqrt[3]{3}(\sqrt[6]{3} - 1)$.
4. **Amplificarea succesivă:**
 - Amplificăm cu $\sqrt[3]{9}$, pentru a elimina $\sqrt[3]{3}$ din factor.
 - Amplificăm cu $(\sqrt[6]{3^5} + \sqrt[6]{3^4} + \dots + 1)$ pentru factorul $(\sqrt[6]{3} - 1)$, obținând la numitor $(\sqrt[6]{3})^6 - 1^6 = 3 - 1 = 2$.

Model 4.5 – Identități de ordinul 5

Cerință: Să se raționalizeze numitorul fracției: $\frac{1}{\sqrt[5]{3} - 1}$.

Explicație Pas cu Pas:

1. **Identitatea utilizată:** $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$.
2. **Alegerea factorului de amplificare:** Pentru $x = \sqrt[5]{3}$, amplificăm cu:
 $(\sqrt[5]{3})^4 + (\sqrt[5]{3})^3 + (\sqrt[5]{3})^2 + \sqrt[5]{3} + 1 = \sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{3} + 1$.
3. **Calculul numitorului:** $(\sqrt[5]{3} - 1)(\dots) = (\sqrt[5]{3})^5 - 1^5 = 3 - 1 = 2$.
4. **Rezultat final:** $\frac{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{3} + 1}{2}$.

Recomandare Metodică

Pentru a aborda cu succes exercițiile de raționalizare, urmăriți acești 4 pași fundamentali:

1. **Simplificați radicalii înainte de amplificare:** Scoateți factorii de sub radical și simplificați fracția dacă este posibil. Acest lucru previne lucrul cu numere inutile de mari.
2. **Păstrați numărătorul sub formă factorizată:** Nu desfaceți parantezele la numărător imediat după amplificare, deoarece de cele mai multe ori numitorul simplifică direct factorul din față.
3. **Atenție la semnul minus:** Atunci când numitorul devine negativ (de exemplu $16 - 18 = -2$), treceți minusul la numărător, schimbând toate semnele din paranteză.
4. **Grupați convenabil la numitori complecși:** Dacă numitorul are 3 sau 4 termeni, căutați mai întâi o factorizare prin grupare. Dacă nu este posibil, grupați doi termeni ca o singură entitate.