Ghid de calcul al derivatelor – partea I

Funcția putere cu exponent natural, funcția polinomială și funcția rațională

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Material de sprijin metodic pentru înțelegerea treptată a regulilor de derivare

1. Introducere și noțiuni fundamentale

Derivata unei funcții reprezintă viteza cu care se modifică valoarea funcției atunci când variabila independentă x se schimbă. În practica școlară de nivel liceal, derivarea constă în aplicarea riguroasă a unui ansamblu de formule și reguli de calcul algebric.

Notăm derivata funcției f în raport cu variabila x prin simbolul $f'(x)$ (citit „*f derivat de x*” sau „ derivata funcției f în punctul x”).

Ce înseamnă derivata unei funcții?

Dacă avem o funcție $f(x)$, derivata ei $f'(x)$ este o nouă funcție care ne oferă panta tangentei la grafic în fiecare punct. Pentru un elev care învață regulile de calcul, obiectivul principal este transformarea expresiei $f(x)$ într-o nouă expresie $f'(x)$ folosind reguli și formule fixe.

2. Funcția putere cu exponent natural

Funcția putere este cărămida de bază a calculului diferențial. Regula fundamentală afirmă că, prin derivare, exponentul coboară în fața variabilei ca factor multiplicativ, iar puterea variabilei scade cu o unitate.

2.1. Formula generală

Pentru orice număr natural $n \geq 1$:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

2.2. Cazuri particulare și elemente de bază

Din formula generală derivă direct următoarele rezultate fundamentale:

- **Derivata unei constante:** $(c)' = 0$, unde $c \in \mathbb{R}$ este orice număr fix. Orice expresie ce nu conține x, adică o constantă, sau mai exact un număr, adunat sau scăzut, devine 0 prin derivare.
- **Derivata identității:** $(x)' = 1$.
- **Derivata pătratului:** $\left(x^2\right)' = 2x^{2-1} = 2x$.
- **Derivata cubului:** $\left(x^3\right)' = 3x^{3-1} = 3x^2$.
- **Derivata puterii a patra:** $\left(x^4\right)' = 4x^{4-1} = 4x^3$.

Tipul de funcție	Formula	Exemplu	Observații utile
Constantă	$(c)' = 0$	$(7)' = 0$	Orice număr fără x prin derivare devine 0.
Identitate	$(x)' = 1$	$(x)' = 1$	x derivat este 1.
Putere	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(x^5\right)' = 5x^4$	Exponentul coboară în față, iar puterea variabilei scade cu o unitate.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

3. Reguli fundamentale de derivare

Atunci când combinăm funcțiile prin operații algebrice, aplicăm patru reguli esențiale.

3.1. Înmulțirea cu o constantă (număr real)

Dacă o funcție este înmulțită cu un număr constant c, numărul **se păstrează** în fața derivatei și se înmulțește cu rezultatul derivării funcției:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Avertisment privind constantele multiplicative

Nu confundați termenul liber constant cu constanta din fața lui x!
- În expresia $x^3 + 5$, numărul 5 este termen liber, deci derivata sa este 0: $\left(x^3 + 5\right)' = 3x^2 + 0 = 3x^2$.
- În expresia $5x^3$, numărul 5 este înmulțit cu x^3, deci se păstrează: $\left(5x^3\right)' = 5 \cdot \left(x^3\right)' = 5 \cdot \left(3x^2\right) = 15x^2$.

3.2. Suma și diferența de funcții derivabile

Derivata unei sume sau a unei diferențe este egală cu suma sau diferența derivatelor fiecărui termen în parte:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

3.3. Produsul a două funcții derivabile

Derivata produsului **nu** este egală cu produsul derivatelor. Formula corectă este:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

3.4. Câtul a două funcții derivabile

Derivata raportului a două funcții este dată de formula:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

Ghid de memorare a regulii câtului

1. La numărător avem derivata primului termen înmulțită cu al doilea nederivat, **minus** primul nederivat înmulțit cu derivata celui de-al doilea.
2. La numitor avem funcția de la numitor **ridicată la pătrat** (fără a o deriva).

4. Funcția polinomială

O funcție polinomială are forma generală:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Pentru a deriva o funcție polinomială, aplicăm combinat regula sumei și regula înmulțirii cu o constantă. Rezultatul se obține derivând fiecare termen în parte:

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

5. Funcția rațională

O funcție rațională este raportul a două funcții polinomiale:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad Q(x) \neq 0$$

Derivarea funcțiilor raționale necesită utilizarea riguroasă a regulii câtului:

$$R'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{[Q(x)]^2}$$

După aplicarea formulei, se efectuează înmulțirile de la numărător și se reduc termenii asemenea. Numitorul se lasă, de regulă, sub formă de pătrat restrâns.

6. Exemple rezolvate pas cu pas

6.1. Exemplul 1: Derivarea unei funcții polinomiale cu coeficienți întregi

Să se calculeze derivata funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 9$.

Rezolvare detaliată

Aplicăm regula sumei și a diferenței pentru a deriva fiecare termen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4x^3\right)' - \left(5x^2\right)' + (7x)' - (9)' \\ &= 4 \cdot \left(x^3\right)' - 5 \cdot \left(x^2\right)' + 7 \cdot (x)' - 0 \\ &= 4 \cdot \left(3x^2\right) - 5 \cdot (2x) + 7 \cdot 1 \\ &= 12x^2 - 10x + 7 \end{aligned}$$

6.2. Exemplul 2: Derivarea unei funcții polinomiale cu coeficienți raționali

Să se calculeze derivata funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + 12$.

Rezolvare detaliată

Păstrăm fracțiile din față și derivăm puterile lui x:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \cdot \left(4x^3\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(3x^2\right) + \frac{5}{2} \cdot (2x) - 1 + 0 \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 4\right) x^3 - \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) x^2 + \left(\frac{5}{2} \cdot 2\right) x - 1 \\ &= x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \end{aligned}$$

6.3. Exemplul 3: Produs de funcții polinomiale

Să se calculeze derivata funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+3)\left(x^2 - 4\right)$.

Rezolvare detaliată prin două metode

Metoda 1: Aplicarea regulii produsului $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

- Identificăm $u(x) = 2x + 3 \;\Rightarrow\; u'(x) = 2$.
- Identificăm $v(x) = x^2 - 4 \;\Rightarrow\; v'(x) = 2x$.

Înlocuim în formulă:

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= 2\cdot\left(x^2-4\right) + (2x+3)\cdot(2x) \\ &= 2x^2 - 8 + 4x^2 + 6x \\ &= 6x^2 + 6x - 8 \end{aligned}$$

Metoda 2: Desfacerea parantezelor înainte de derivare

$$f(x) = 2x\cdot x^2 - 2x\cdot 4 + 3\cdot x^2 - 3\cdot 4 = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

$$f'(x) = 2\cdot\left(3x^2\right) + 3\cdot(2x) - 8\cdot 1 - 0 = 6x^2 + 6x - 8$$

Ambele metode conduc la același rezultat.

6.4. Exemplul 4: Funcție rațională – raport funcții polinomiale de gradul I

Să se calculeze derivata funcției $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-\frac{5}{2}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x-1}{2x+5}$.

Rezolvare detaliată

Notăm $u(x)=3x-1$ și $v(x)=2x+5$.
- Derivata numărătorului: $u'(x)=3$.
- Derivata numitorului: $v'(x)=2$.

Aplicăm regula câtului:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{3\cdot(2x+5) - (3x-1)\cdot 2}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{6x+15-(6x-2)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{6x+15-6x+2}{(2x+5)^2} = \frac{17}{(2x+5)^2} \end{aligned}$$

6.5. Exemplul 5: Funcție rațională (gradul 2 / gradul 1)

Să se calculeze derivata funcției $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$.

Rezolvare detaliată

- Numărătorul: $u(x)=x^2-3x+2 \;\Rightarrow\; u'(x)=2x-3$.
- Numitorul: $v(x)=x+1 \;\Rightarrow\; v'(x)=1$.

Aplicăm regula de derivare a câtului:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-3)(x+1) - \left(x^2-3x+2\right)\cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\left(2x^2+2x-3x-3\right) - \left(x^2-3x+2\right)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - x - 3 - x^2 + 3x - 2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

7. Exerciții propuse

Rezolvați următoarele exerciții pe caiet, parcurgând pașii arătați în exemplele model.

7.1. Nivel 1: Funcția putere și constante

Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6$
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 8x^3$
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^5$
d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 15$
f) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{5}x^{10}$

7.2. Nivel 2: Funcții polinomiale

Să se calculeze derivatele funcțiilor polinomiale:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 10$
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 3$
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$
d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)(x+5)$
e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 2x + 9x^2 - 4x^3$
f) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 10x^3 + 25x$

7.3. Nivel 3: Produse de funcții polinomiale

Să se calculeze derivata funcțiilor folosind regula produsului:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^2+1\right)(3x-2)$
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(2x^2 - x\right)\left(x^2+4\right)$
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^3-1\right)(2x+1)$
d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (4x-3)(5x+2)$

7.4. Nivel 4: Funcții raționale

Să se calculeze derivatele funcțiilor raționale:

a) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$
b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x-1}{x+1}$
c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+5}{3x-4}$
d) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$
e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
f) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^2-4x+1}{x-1}$
g) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x^2}{2x+3}$
h) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

8. Soluții și răspunsuri

8.1. Răspunsuri Nivel 1

a) $f'(x) = 6x^5$

b) $f'(x) = 24x^2$

c) $f'(x) = -15x^4$

d) $f'(x) = 2x^3$

e) $f'(x) = 0$

f) $f'(x) = 4x^9$

8.2. Răspunsuri Nivel 2

a) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 6$

b) $f'(x) = 8x^3 - 15x^2 + 2x - 7$

c) $f'(x) = x^2 - x + 4$

d) $f(x) = x^2 + 3x - 10 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x + 3$

e) $f'(x) = -2 + 18x - 12x^2$

f) $f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 25$

8.3. Răspunsuri Nivel 3

a) $f'(x) = (2x)(3x-2) + \left(x^2+1\right)(3) = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$

b) $f'(x) = (4x-1)\left(x^2+4\right) + \left(2x^2 - x\right)(2x) = 4x^3 + 16x - x^2 - 4 + 4x^3 - 2x^2 = 8x^3 - 3x^2 + 16x - 4$

c) $f'(x) = \left(3x^2\right)(2x+1) + \left(x^3-1\right)(2) = 6x^3 + 3x^2 + 2x^3 - 2 = 8x^3 + 3x^2 - 2$

d) $f'(x) = 4(5x+2) + (4x-3)\cdot 5 = 20x + 8 + 20x - 15 = 40x - 7$

8.4. Răspunsuri Nivel 4

a) $f'(x) = \frac{1\cdot(x-3) - (x+2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x-2}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}$

b) $f'(x) = \frac{4(x+1) - (4x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{4x+4-4x+1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{2(3x-4) - (2x+5)\cdot 3}{(3x-4)^2} = \frac{6x-8-6x-15}{(3x-4)^2} = \frac{-23}{(3x-4)^2}$

d) $f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

e) $f'(x) = \frac{2x\left(x^2+1\right) - \left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$

f) $f'(x) = \frac{(4x-4)(x-1) - \left(2x^2-4x+1\right)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-8x+4-2x^2+4x-1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x+3}{(x-1)^2}$

g) $f'(x) = \frac{-2x(2x+3) - \left(1-x^2\right)\cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{-4x^2-6x-2+2x^2}{(2x+3)^2} = \frac{-2x^2-6x-2}{(2x+3)^2}$

h) $f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2+1\right) - x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro