Ghid de calcul al derivatelor – partea a II-a

Funcția putere cu exponent real, funcția exponențială și funcția logaritmică

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Extinderea domeniului de derivare și exerciții combinate cu polinoame și funcții raționale

1. Introducere și extinderea regulilor de derivare

În prima parte a ghidului am analizat derivarea funcțiilor polinomiale și raționale, având ca element de bază funcția putere cu exponent natural x^n. În această a doua parte extindem aparatul matematic către exponenți reali oarecare (exponenți întregi negativi și raționali), precum și către două clase fundamentale de funcții transcendente: **funcția exponențială** și **funcția logaritmică**.

Toate regulile algebrice învățate anterior (înmulțirea cu o constantă, suma, diferența, produsul și câtul) rămân valabile și se combină direct cu noile formule de derivare.

2. Funcția putere cu exponent real

Formula generală pentru derivarea puterii cu exponent real $r\in\mathbb{R}$ este identică ca structură cu cea pentru exponenți naturali:

$$(x^r)' = r\cdot x^{r-1}, \qquad x>0 \quad (\text{pentru } r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$$

Din această formulă generală derivă două categorii foarte importante în aplicațiile practice: exponenții întregi negativi și radicalii (exponenți fracționari).

2.1. Puterile cu exponent întreg negativ

Folosind identitatea algebrică $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$, derivata se obține aplicând formula generală:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)' = -n\cdot x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Ghid rapid pentru fracții cu numărător constant

Pentru expresii de forma $\frac{c}{x^n}$, nu este necesară aplicarea formulei complicate a câtului! Este mult mai rapid să scriem $\frac{c}{x^n}=c\cdot x^{-n}$ și să derivăm direct:

$$\left(\frac{c}{x^n}\right)' = c\cdot\left(-\frac{n}{x^{n+1}}\right) = -\frac{c\cdot n}{x^{n+1}}$$

2.2. Radicalii (exponenți fracționari)

Radicalii reprezintă puteri cu exponent fracționar: $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$. Aplicând formula puterii obținem cazurile particulare esențiale:

- **Radicalul de ordinul 2:**

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

- **Radicalul de ordinul 3:**

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

- **Radicalul de ordinul n:**

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Tipul de funcție	Formulă	Exemplu	Observații utile
Fracție simplă	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{5}{x}\right)' = -\frac{5}{x^2}$	Semnul minus apare mereu.
Putere negativă	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = -\frac{4}{x^5}$	Exponentul de la numitor crește cu 1.
Radical ordin 2	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(6\sqrt{x})' = \frac{3}{\sqrt{x}}$	Valabil pentru $x > 0$.
Radical ordin 3	$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	Valabil pentru $x \neq 0$.

3. Funcția exponențială

Funcția exponențială are variabila x la exponent. Regulile de derivare sunt:

3.1. Baza e (numărul lui Euler)

Funcția e^x este singura funcție nenulă care este egală cu propria sa derivată:
$(e^x)' = e^x$.

3.2. Baza oarecare a (a>0, a≠1)

Atunci când baza este un număr real oarecare a, apare ca factor multiplicativ logaritmul natural al bazei, $\ln a$:
$(a^x)' = a^x \ln a$.

Confuzie frecventă între funcția putere și funcția exponențială

Nu confunda x^n cu a^x!
- x^3 este o **funcție putere** (baza este variabilă, exponentul e constant) $\Rightarrow \left(x^3\right)' = 3x^2$.
- 3^x este o **funcție exponențială** (baza e constantă, exponentul e variabil) $\Rightarrow (3^x)' = 3^x \ln 3$.

4. Funcția logaritmică

Funcția logaritmică este definită pentru $x > 0$. Formulele de derivare sunt:

4.1. Logaritmul natural (baza e)

Logaritmul în bază e se notează $\ln x$:
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$

4.2. Logaritmul în bază oarecare a (a>0, a≠1)

Pentru un logaritm într-o bază oarecare a:
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad x > 0.$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

5. Exemple rezolvate pas cu pas

5.1. Exemplul 1: Combinarea funcțiilor polinomiale cu radicali și puteri cu exponenți negativi

Să se calculeze derivata funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-3\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x}+8$.

Rezolvare detaliată

Aplicăm regula sumei și derivăm fiecare termen conform formulei specifice:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4x^3\right)' - \left(3\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{2}{x^2}\right)' - \left(\frac{5}{x}\right)' + (8)' \\ &= 4\cdot\left(3x^2\right) - 3\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 2\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) - 5\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0 \\ &= 12x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^2} \end{aligned}$$

5.2. Exemplul 2: Produs între o funcție polinomială și funcția exponențială

Să se calculeze derivata funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2-4x+5\right)e^x$.

Rezolvare detaliată

Aplicăm regula derivării produsului $(u\cdot v)'=u'v+uv'$:
- $u(x)=x^2-4x+5 \;\Rightarrow\; u'(x)=2x-4$.
- $v(x)=e^x \;\Rightarrow\; v'(x)=e^x$.

Înlocuim în formulă și dăm factor comun pe e^x:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-4)e^x + \left(x^2-4x+5\right)e^x \\ &= e^x\cdot\left[(2x-4)+\left(x^2-4x+5\right)\right] \\ &= e^x\left(x^2-2x+1\right) = e^x(x-1)^2 \end{aligned}$$

5.3. Exemplul 3: Produs între o funcție polinomială și funcția logaritmică

Să se calculeze derivata funcției $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(3x^2+2x\right)\ln x$.

Rezolvare detaliată

Aplicăm regula de derivare a produsului $(u\cdot v)'=u'v+uv'$:
- $u(x)=3x^2+2x \;\Rightarrow\; u'(x)=6x+2$.
- $v(x)=\ln x \;\Rightarrow\; v'(x)=\frac{1}{x}$.

Calculăm derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x+2)\ln x + \left(3x^2+2x\right)\cdot\frac{1}{x} \\ &= (6x+2)\ln x + \frac{3x^2}{x} + \frac{2x}{x} \\ &= (6x+2)\ln x + 3x + 2 \end{aligned}$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

5.4. Exemplul 4: Cât între funcția exponențială și o funcție polinomială

Să se calculeze derivata funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2+3}$.

Rezolvare detaliată

Aplicăm regula de derivare a câtului $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:
- $u(x) = e^x \;\Rightarrow\; u'(x) = e^x$.
- $v(x) = x^2 + 3 \;\Rightarrow\; v'(x) = 2x$.

Substituim și scoatem factor comun:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \left(x^2+3\right) - e^x \cdot (2x)}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{e^x\left(x^2 - 2x + 3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$$

5.5. Exemplul 5: Cât între funcția logaritmică și o funcție polinomială

Să se calculeze derivata funcției $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Rezolvare detaliată

Aplicăm regula de derivare a câtului:
- $u(x) = \ln x \;\Rightarrow\; u'(x) = \frac{1}{x}$.
- $v(x) = x^2 \;\Rightarrow\; v'(x) = 2x$.

Calculăm derivata:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^2 - (\ln x) \cdot (2x)}{\left(x^2\right)^2} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x\,(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

6. Exerciții propuse

6.1. Nivel 1: Radicali și puteri cu exponenți negativi

Să se calculeze derivatele funcțiilor următoare:

a) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5\sqrt{x} - \frac{3}{x}$
b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}$
c) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x} + 6$
d) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3\sqrt{x} + 2x^5 - \frac{10}{x^4}$

6.2. Nivel 2: Exponențiale și logaritmi

Să se calculeze derivatele funcțiilor:

a) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3e^x + 2\ln x - 5x^2$
b) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \log_2 x$
c) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4e^x - 3\ln x + \sqrt{x}$
d) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 \cdot 3^x - 4\ln x + 7$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

6.3. Nivel 3: Produse combinate

Să se calculeze derivatele funcțiilor folosind regula produsului:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 e^x$
b) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = (2x-1)\ln x$
c) $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$
d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \left(x^2+1\right) 2^x$
e) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \ln x$

6.4. Nivel 4: Câturi combinate

Să se calculeze derivatele funcțiilor raționale și combinate:

a) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{x+1}$
b) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\ln x}{x}$
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$
d) $f : (0,1) \cup (1,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$
e) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2^x}{x^2}$

7. Soluții și răspunsuri

7.1. Răspunsuri Nivel 1

a) $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$
b) $f'(x) = 4x^3 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x^3}$
c) $f'(x) = -\frac{12}{x^4} + \frac{2}{x^2}$
d) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 10x^4 + \frac{40}{x^5}$

7.2. Răspunsuri Nivel 2

a) $f'(x) = 3e^x + \frac{2}{x} - 10x$
b) $f'(x) = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x \ln 2}$
c) $f'(x) = 4e^x - \frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
d) $f'(x) = 5 \cdot 3^x \ln 3 - \frac{4}{x}$

7.3. Răspunsuri Nivel 3

a) $f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (x+3)$
b) $f'(x) = 2\ln x + (2x-1) \cdot \frac{1}{x} = 2\ln x + 2 - \frac{1}{x}$
c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + \sqrt{x} e^x = e^x \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) = \frac{e^x(1+2x)}{2\sqrt{x}}$
d) $f'(x) = 2x \cdot 2^x + \left(x^2+1\right) 2^x \ln 2 = 2^x \left[2x + \left(x^2+1\right)\ln 2\right]$
e) $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x\left(2\ln x + 1\right)$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

7.4. Răspunsuri Nivel 4

a) $f'(x) = \frac{e^x(x+1)-e^x(1)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

b) $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-\ln x\,(1)}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

c) $f'(x) = \frac{2xe^x-\left(x^2+1\right)e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x\left(2x-x^2-1\right)}{e^{2x}} = \frac{-x^2+2x-1}{e^x} = \frac{-(x-1)^2}{e^x}$

d) $f'(x) = \frac{1\cdot\ln x-(x-1)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x-1+\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x\ln x-x+1}{x(\ln x)^2}$

e) $f'(x) = \frac{2^x\ln 2\cdot x^2-2^x\cdot 2x}{x^4} = \frac{x2^x(x\ln 2-2)}{x^4} = \frac{2^x(x\ln 2-2)}{x^3}$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro