Ghid de calcul al derivatelor – partea III

Funcții trigonometrice directe și inverse

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Material de sprijin metodic pentru înțelegerea treptată a regulilor de derivare

1. Introducere și formule fundamentale

În această a treia parte a ghidului extindem domeniul de derivare la clasa funcțiilor trigonometrice directe (sin, cos, tg, ctg) și a funcțiilor trigonometrice inverse (arcsin, arccos, arctg, arcctg).

Aceste formule se combină cu regulile generale deja învățate (suma, diferența, produsul, câtul și înmulțirea cu o constantă).

1.1. Funcții trigonometrice directe

Pentru orice x din domeniul maxim de definiție, avem următoarele derivate elementare:

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x, \quad x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1+\operatorname{ctg}^2 x\right), \quad x \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Atenție la semnele minus!

Funcțiile trigonometrice ale căror denumiri încep cu litera „c” (cos și ctg) au derivatele afectate de semnul **minus**:

- $(\cos x)' = -\sin x$ (nu $\sin x$!);
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ (nu $\frac{1}{\sin^2 x}$!).

1.2. Funcții trigonometrice inverse

Funcțiile trigonometrice inverse au derivate exprimate algebric prin fracții algebrice și radicali:

$$\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1) \\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\in(-1,1) \\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x\in\mathbb{R} \\
(\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, \quad x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Simetria derivatelor trigonometrice inverse

Observați că derivata lui $\arccos x$ este exact opusa derivatei lui $\arcsin x$:

$$(\arccos x)' = -\,(\arcsin x)'$$

Analog, derivata lui $\operatorname{arcctg} x$ este opusa derivatei lui $\operatorname{arctg} x$:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)'$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

Acest fapt rezultă din identitățile fundamentale:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

și
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$,
prin derivare membrul drept având derivata 0.

Funcția	Formula derivatei	Domeniul derivatei	Observații utile
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	Derivata sinusului este cosinusul.
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	Apariția semnului minus.
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	Se pot folosi ambele forme.
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$	Cu semnul minus în față.
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$	Numitor cu radical.
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$	Cu minus la numărător.
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	Numitor fără radical.
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	Opusa derivatei de $\operatorname{arctg} x$.

2. Exemple rezolvate pas cu pas

2.1. Exemplul 1: Sumă de funcții trigonometrice și o funcție polinomială

Să se calculeze derivata funcției:
$f\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4\sin x - 3\cos x + 2\operatorname{tg} x - 5x^3 + 7$.

Rezolvare detaliată

Derivăm fiecare termen folosind regula sumei și înmulțirea cu o constantă:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4\sin x)' - (3\cos x)' + (2\operatorname{tg} x)' - \left(5x^3\right)' + (7)' \\ &= 4 \cdot (\sin x)' - 3 \cdot (\cos x)' + 2 \cdot (\operatorname{tg} x)' - 5 \cdot \left(3x^2\right) + 0 \\ &= 4\cos x - 3(-\sin x) + 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 15x^2 \\ &= 4\cos x + 3\sin x + \frac{2}{\cos^2 x} - 15x^2. \end{aligned}$$

2.2. Exemplul 2: Produs între o funcție polinomială și o funcție trigonometrică

Să se calculeze derivata funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \sin x$.

Rezolvare detaliată

Aplicăm regula de derivare a produsului $(u \cdot v)' = u'v + uv'$:
- $u(x) = x^3 \;\Rightarrow\; u'(x) = 3x^2$;
- $v(x) = \sin x \;\Rightarrow\; v'(x) = \cos x$.

Înlocuim în formulă:
$f'(x) = \left(x^3\right)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x = x^2\,(3\sin x + x\cos x)$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

2.3. Exemplul 3: Produs combinat cu funcție exponențială

Să se calculeze derivata funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x\,(\sin x - \cos x)$.

Rezolvare detaliată

Aplicăm regula de derivare a produsului:
- $u(x) = e^x \;\Rightarrow\; u'(x) = e^x$;
- $v(x) = \sin x - \cos x \;\Rightarrow\; v'(x) = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$.

Calculăm derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x\,(\sin x - \cos x) + e^x\,(\cos x + \sin x) \\ &= e^x\,[\sin x - \cos x + \cos x + \sin x] \\ &= e^x\,(2\sin x) = 2e^x \sin x. \end{aligned}$$

2.4. Exemplul 4: Cât combinat cu funcții trigonometrice inverse

Să se calculeze derivata funcției $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Rezolvare detaliată

Aplicăm regula de derivare a câtului $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:
- $u(x) = \operatorname{arctg} x \;\Rightarrow\; u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$;
- $v(x) = x \;\Rightarrow\; v'(x) = 1$.

Efectuăm calculul:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot x - (\operatorname{arctg} x)\cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{x^2} \\ &= \frac{x - \left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}{x^2\,(1+x^2)}. \end{aligned}$$

2.5. Exemplul 5: Expresie mixtă cu radical și arcsinus

Să se calculeze derivata funcției $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

Rezolvare detaliată

Derivăm termen cu termen:
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- Pentru $\sqrt{1-x^2}$, folosim regula derivării compuse sau transformarea în putere: derivata radicalului este $\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Adunând cele două rezultate:
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

3. Exerciții propuse

3.1. Nivel 1: Trigonometrice directe simple

Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5\sin x - 2\cos x$
b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 3\operatorname{tg} x$
c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4\operatorname{ctg} x - 7x$
d) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x$

3.2. Nivel 2: Trigonometrice inverse simple

Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

a) $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3\arcsin x - 2\arccos x$
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5\operatorname{arctg} x + 4x^3$
c) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arcctg} x - \ln x$
d) $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2\arcsin x + \operatorname{arctg} x$

3.3. Nivel 3: Produse combinate

Să se calculeze derivatele funcțiilor folosind regula produsului:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x\cos x$
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x \sin x$
c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \left(x^2 + 1\right)\operatorname{arctg} x$
d) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x} \cdot \arcsin x$
e) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x \cdot \cos x$

3.4. Nivel 4: Câturi combinate

Să se calculeze derivatele funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$
b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1+\cos x}{\sin x}$
c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$
d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$
e) $f : [-1,0) \cup (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{\arcsin x}$

4. Soluții și răspunsuri

4.1. Răspunsuri Nivel 1

a) $f'(x) = 5\cos x + 2\sin x$
b) $f'(x) = 2x + \frac{3}{\cos^2 x}$
c) $f'(x) = -\frac{4}{\sin^2 x} - 7$
d) $f'(x) = \cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

4.2. Răspunsuri Nivel 2

a) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f'(x) = \frac{5}{1+x^2} + 12x^2$

c) $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x}$

d) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$

4.3. Răspunsuri Nivel 3

a) $f'(x) = 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$

b) $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x\left(\sin x + \cos x\right)$

c) $f'(x) = 2x\operatorname{arctg} x + \left(x^2+1\right) \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2x\operatorname{arctg} x + 1$

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin x + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

4.4. Răspunsuri Nivel 4

a) $f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - (1+\cos x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$

c) $f'(x) = \frac{e^x \cos x - e^x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$

d) $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}\left(1+x^2\right) - (\operatorname{arctg} x)(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1-2x\operatorname{arctg} x}{\left(1+x^2\right)^2}$

e) $f'(x) = \frac{2x\arcsin x - x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(\arcsin x\right)^2} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(\arcsin x\right)^2}$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro