Ghid de calcul al derivatelor – partea IV

Derivarea funcțiilor compuse (regula lanțului)

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Material metodic pentru înțelegerea și aplicarea regulii de derivare a funcțiilor compuse

1. Introducere și conceptul de funcție compusă

Până în acest punct, am studiat derivarea funcțiilor elementare simple, unde variabila independentă era x (de exemplu x^5, $\sqrt{x}$, e^x, $\ln x$, $\sin x$). În aplicațiile reale și în problemele de examen, întâlnim frecvent expresii în care în locul variabilei simple x se află o altă expresie sau funcție $u(x)$.

O funcție de forma $f(x) = (g \circ u)(x) = g\left(u(x)\right)$ se numește **funcție compusă**.

Analogia „cepei” sau a casetei din casetă

Putem privi o funcție compusă ca pe o structură pe două niveluri:

- **Funcția interioară** $u(x)$: expresia aflată „înăuntru” (de exemplu, un polinom x^2+3).
- **Funcția exterioară** $g(u)$: operația aplicată expresiei interioare (de exemplu, ridicarea la o putere, radicalul, exponențiala, logaritmul sau o funcție trigonometrică).

De exemplu, în expresia $f(x) = \left(x^2+3\right)^4$, funcția interioară este $u(x) = x^2+3$, iar funcția exterioară este ridicarea la puterea a patra.

2. Formula fundamentală (regula lanțului)

Regula de derivare a funcțiilor compuse (cunoscută internațional sub numele de *Chain Rule* sau *Regula lanțului*) stabilește că derivata unei funcții compuse este egală cu derivata funcției exterioare înmulțită cu derivata funcției interioare.

$$\left(g\left(u(x)\right)\right)' = g'\left(u(x)\right) \cdot u'(x)$$

Pe scurt, dacă notăm simplificat $u = u(x)$, regula se aplică extinzând toate formulele elementare prin adăugarea factorului multiplicativ u'.

3. Tablou comparativ: funcții simple versus funcții compuse

Tabelul de mai jos prezintă în paralel formulele elementare cunoscute și extensia lor directă pentru funcții compuse $u(x)$.

Tipul de funcție	**Formulă simplă** (x)	**Formulă compusă** $(u(x))$
Putere	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
Radical de ordinul 2	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Radical de ordinul n	$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
Exponențială cu baza e	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
Exponențială cu baza a	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
Logaritm natural	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

Tipul de funcție	**Formulă simplă** (x)	**Formulă compusă** $(u(x))$
Sinus	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
Cosinus	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
Tangentă	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
Arcsinus	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Arccosinus	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
Arctangentă	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
Arccotangentă	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

4. Algoritmul practic de derivare în 3 pași

Pentru a evita greșelile de calcul, parcurgeți întotdeauna următorii trei pași metodici:

Procedura pas cu pas

1. **Pasul 1 (Identificarea):** Determinați clar funcția interioară $u(x)$ și calculați separat derivata ei $u'(x)$ pe ciornă.
2. **Pasul 2 (Derivarea exteriorului):** Derivați structura exterioară păstrând expresia $u(x)$ absolut neschimbată în interiorul ei.
3. **Pasul 3 (Multiplicarea și simplificarea):** Înmulțiți rezultatul obținut la Pasul 2 cu $u'(x)$ și efectuați simplificările algebrice finale.

Cea mai frecventă greșeală a elevilor!

Greșeala clasică la derivarea funcțiilor compuse este **uitarea înmulțirii cu** $u'(x)$.
De exemplu, mulți elevi scriu greșit că derivata lui $\sin(3x)$ este $\cos(3x)$. Rezultatul corect este $\cos(3x) \cdot (3x)' = 3\cos(3x)$!

5. Exemple model rezolvate pas cu pas

5.1. Exemplul 1: Putere compusă

Să se calculeze derivata funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(2x^3 - 5x + 4\right)^5$.

Rezolvare detaliată

Avem o funcție de forma u^n, unde $u(x) = 2x^3 - 5x + 4$ și $n = 5$.

- Calculăm derivata funcției interioare: $u'(x) = \left(2x^3 - 5x + 4\right)' = 6x^2 - 5$.
- Aplicăm formula $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot \left(2x^3 - 5x + 4\right)^{5-1} \cdot \left(2x^3 - 5x + 4\right)' \\ &= 5\left(2x^3 - 5x + 4\right)^4 \cdot \left(6x^2 - 5\right). \end{aligned}$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

5.2. Exemplul 2: Radical compus

Să se calculeze derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+6x+10}$.

Rezolvare detaliată

Avem forma $\sqrt{u}$, unde $u(x)=x^2+6x+10$.
- Derivata interiorului este $u'(x)=\big(x^2+6x+10\big)'=2x+6=2(x+3)$.
- Aplicăm formula $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$f'(x)=\frac{\big(x^2+6x+10\big)'}{2\sqrt{x^2+6x+10}}=\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+10}}$$
$$=\frac{2(x+3)}{2\sqrt{x^2+6x+10}}=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+10}}.$$

5.3. Exemplul 3: Exponențială compusă

Să se calculeze derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{3x^2-4x+1}$.

Rezolvare detaliată

Avem forma e^u, unde $u(x)=3x^2-4x+1$.
- Derivata exponentului este $u'(x)=\big(3x^2-4x+1\big)'=6x-4$.
- Aplicăm formula $(e^u)'=e^u\cdot u'$:

$$f'(x)=e^{3x^2-4x+1}\cdot\big(3x^2-4x+1\big)'=(6x-4)e^{3x^2-4x+1}.$$

5.4. Exemplul 4: Logaritm compus

Să se calculeze derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\big(x^2+5\big)$.

Rezolvare detaliată

Avem forma $\ln u$, unde $u(x)=x^2+5$.
- Derivata argumentului este $u'(x)=\big(x^2+5\big)'=2x$.
- Aplicăm formula $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$:

$$f'(x)=\frac{\big(x^2+5\big)'}{x^2+5}=\frac{2x}{x^2+5}.$$

5.5. Exemplul 5: Funcție trigonometrică compusă

Să se calculeze derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(5x-2)$.

Rezolvare detaliată

Avem forma $\sin u$, unde $u(x)=5x-2$.
- Derivata argumentului este $u'(x)=(5x-2)'=5$.
- Aplicăm formula $(\sin u)'=u'\cdot\cos u$:

$$f'(x)=\cos(5x-2)\cdot(5x-2)'=5\cos(5x-2).$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

5.6. Exemplul 6: Funcție trigonometrică inversă compusă

Să se calculeze derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}(3x+1)$.

Rezolvare detaliată

Avem forma $\operatorname{arctg} u$, unde $u(x)=3x+1$.
- Derivata interiorului este $u'(x)=3$.
- Aplicăm formula $(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}$:

$$f'(x)=\frac{(3x+1)'}{1+(3x+1)^2}=\frac{3}{1+(9x^2+6x+1)}=\frac{3}{9x^2+6x+2}.$$

6. Exerciții propuse

Rezolvați exercițiile pe caiet, aplicând riguros regula de derivare a funcțiilor compuse.

6.1. Nivel 1: Puteri și radicali compuși

Să se calculeze derivatele funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+3\right)^4$
b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(5x-2)^6$
c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^3-4x\right)^3$
d) $f:\left[-\frac{7}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x+7}$
e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+16}$
f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{3x-1}$

6.2. Nivel 2: Exponențiale și logaritmi compuși

Să se calculeze derivatele funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{4x}$
b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2+2x}$
c) $f:\left(-\frac{8}{3},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(3x+8)$
d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x^2-4x+5\right)$

6.3. Nivel 3: Trigonometrice directe și inverse compuse

Să se calculeze derivatele funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(3x+4)$
b) $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi}\mid k\in\mathbb{N}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}\left(x^2\right)$
c) $f:\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin(2x)$
d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}(5x)$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

6.4. Nivel 4: Combinații de funcții compuse cu produse și câturi

Să se calculeze derivatele funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot e^{2x}$

b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln(3x)$

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{x+1}$

d) $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

7. Soluții și răspunsuri detaliate

7.1. Răspunsuri Nivel 1

a) $f'(x)=4\left(x^2+3\right)^3\cdot\left(x^2+3\right)'=4\left(x^2+3\right)^3\cdot 2x=8x\left(x^2+3\right)^3$

b) $f'(x)=6(5x-2)^5\cdot(5x-2)'=6(5x-2)^5\cdot 5=30(5x-2)^5$

c) $f'(x)=3\left(x^3-4x\right)^2\cdot\left(3x^2-4\right)=3\left(3x^2-4\right)\left(x^3-4x\right)^2$

d) $f'(x)=\dfrac{(2x+7)'}{2\sqrt{2x+7}}=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+7}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+7}}$

e) $f'(x)=\dfrac{\left(x^2+16\right)'}{2\sqrt{x^2+16}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$

f) $f'(x)=\dfrac{(3x-1)'}{3\sqrt[3]{(3x-1)^2}}=\dfrac{3}{3\sqrt[3]{(3x-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$

7.2. Răspunsuri Nivel 2

a) $f'(x)=e^{4x}\cdot(4x)'=4e^{4x}$

b) $f'(x)=e^{-x^2+2x}\cdot(-2x+2)=2(1-x)e^{-x^2+2x}$

c) $f'(x)=\dfrac{(3x+8)'}{3x+8}=\dfrac{3}{3x+8}$

d) $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-4x+5\right)'}{x^2-4x+5}=\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}$

7.3. Răspunsuri Nivel 3

a) $f'(x)=-\sin(3x+4)\cdot(3x+4)'=-3\sin(3x+4)$

b) $f'(x)=\dfrac{\left(x^2\right)'}{\cos^2\left(x^2\right)}=\dfrac{2x}{\cos^2\left(x^2\right)}$

c) $f'(x)=\dfrac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

d) $f'(x)=\dfrac{(5x)'}{1+(5x)^2}=\dfrac{5}{1+25x^2}$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

7.4. Răspunsuri Nivel 4

a) $f'(x) = (x)' \cdot e^{2x} + x \cdot \left(e^{2x}\right)' = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot \left(2e^{2x}\right) = e^{2x}(1 + 2x)$

b) $f'(x) = \left(x^2\right)' \cdot \ln(3x) + x^2 \cdot (\ln(3x))' = 2x \ln(3x) + x^2 \cdot \dfrac{3}{3x} = 2x \ln(3x) + x$

c) $f'(x) = \dfrac{\left(e^{3x}\right)'(x+1) - e^{3x}(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{3e^{3x}(x+1) - e^{3x} \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{e^{3x}(3x+2)}{(x+1)^2}$

d) Folosim proprietatea logaritmului $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, deci $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1} = \frac{2}{1-x^2}$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro