Lecția 10. Recapitulare și completări

Aplicații recapitulative

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără opere derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. Recapitulare

Definiție și condiții de existență

Pentru $a>0$, $a\neq 1$, $N>0$: $\log_a N = x \iff a^x = N$.

$\log_{g(x)} f(x)$ are sens $\iff f(x)>0$, $g(x)>0$, $g(x)\neq 1$. Notații: $\log_{10} N = \lg N$, $\log_e N = \ln N$.

Formule de bază ($a,b>0$, $a,b\neq 1$; $A,B,N>0$)

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $\log_a a^n = n$ $a^{\log_a N} = N$

$\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$ $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

$\log_a A^m = m\log_a A$ $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n}\log_a A$

$\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$\log_{a^n} A^m = \dfrac{m}{n}\log_a A$ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[m]{A} = \dfrac{n}{m}\log_a A$ $\log_{\frac{a}{b}} c = \dfrac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_b c - \log_a c}$ $(a\neq b,\ c>0,\ c\neq 1)$

$\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$ (P6) $\log_{b^n} a^n = \log_b a$ (P7)

2. Completări

Completarea 1. Compararea logaritmilor cu aceeași bază

Pentru $x,y>0$:

- dacă $a>1$: $x<y \iff \log_a x < \log_a y$ (sensul inegalității se păstrează);
- dacă $0<a<1$: $x<y \iff \log_a x > \log_a y$ (sensul inegalității se schimbă).

Justificare: pentru $a>1$, din $\log_a x < \log_a y$ rezultă $a^{\log_a x} < a^{\log_a y}$, adică $x<y$, deoarece puterile bazei $a>1$ cresc odată cu exponentul; pentru $0<a<1$ puterile descresc.

Exemple. $\log_2 5 < \log_2 7$ (baza $2>1$); $\log_{0,5} 3 > \log_{0,5} 5$ (baza $0{,}5<1$); $\lg 0{,}7 < \lg 1 = 0$.

Completarea 2. Semnul unui logaritm

$$\log_a N > 0 \iff (a-1)(N-1)>0, \qquad \log_a N < 0 \iff (a-1)(N-1)<0.$$

Altfel spus, logaritmul este *pozitiv* când baza și argumentul sunt „de aceeași parte” a lui 1 (ambele mai mari decât 1 sau ambele între 0 și 1) și *negativ* în caz contrar.
Justificare: pentru $a>1$, $\log_a N>\log_a 1=0 \Leftrightarrow N>1$; *pentru* $0<a<1$, $\log_a N>0=\log_a 1 \Leftrightarrow N<1$.

Exemple. $\log_{0,3} 2<0$ $(0{,}3<1,\ 2>1)$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}>0$ (ambele în $(0,1)$); $\log_5 0{,}7<0$; $\ln 3>0$.

Completarea 3. Baza sau argumentul inversate

$$\log_{\frac{1}{a}} N=-\log_a N, \qquad \log_a \frac{1}{N}=-\log_a N, \qquad \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{N}=\log_a N.$$

Se obțin din P6–P7: $\log_{a^{-1}} N=\frac{1}{-1}\log_a N$ *și* $\log_a N^{-1}=-\log_a N$.

Completarea 4. „Lanțul” de logaritmi

Pentru $a,b,c>0$, diferite de 1, și $d>0$:

$$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d=\log_a d.$$

Demonstrație. Trecem în baza a: $\log_a b\cdot\dfrac{\log_a c}{\log_a b}\cdot\dfrac{\log_a d}{\log_a c}=\log_a d$. Regula se extinde la oricâți factori.

Completarea 5. Numărul de cifre ale unui număr natural

Un număr natural $N\geqslant 1$ are k cifre dacă și numai dacă $10^{k-1}\leqslant N<10^k$. Logaritmând în baza 10:

$$k-1\leqslant \lg N<k \quad\Longrightarrow\quad [\lg N]=k-1 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{k=[\lg N]+1}.$$

Exemplu

Câte cifre are 2^{100}? Știind $\lg 2\approx 0{,}30103$: $\lg 2^{100}=100\lg 2\approx 30{,}103$, deci $[\lg 2^{100}]=30$ și 2^{100} are $30+1=31$ de cifre.

Atenție

- La compararea a doi logaritmi, verificați întâi *baza*: dacă este subunitară, sensul inegalității se schimbă.
- Logaritmi cu baze diferite se compară, de regulă, prin intermediul unui număr „martor” (de exemplu 1 sau $\frac{3}{2}$) sau după aducerea la aceeași bază.

3. Aplicații recapitulative

Exercițiul 1

Calculați $E = \log_3 243 - \log_{\frac{1}{2}} 8 + \lg 0{,}01 + \ln\sqrt{e}$.

Rezolvare. $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5$; $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{2^{-1}} 2^3 = -3$; $\lg 0{,}01 = \lg 10^{-2} = -2$; $\ln\sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

$E = 5 - (-3) + (-2) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{2}$.

Exercițiul 2

Determinați valorile reale ale lui x pentru care are sens $\log_{x-1}\left(6 + x - x^2\right)$.

Rezolvare. Baza: $x-1>0$ și $x-1\neq 1$, adică $x>1$, $x\neq 2$.

Argumentul: $-x^2+x+6>0$. Pentru $-x^2+x+6=0$: $\Delta = 1+24 = 25$, $x_{1,2} = \dfrac{-1\pm 5}{-2}$, deci $x_1=-2$, $x_2=3$. Trinomul (cu $a=-1<0$) este pozitiv între rădăcini: $x\in(-2,3)$.

Intersectând: $x\in(1,2)\cup(2,3)$.

Exercițiul 3

Calculați: a) $\log_6 9 + 2\log_6 2$; b) $2^{\log_4 9} + 25^{\log_5 2}$; c) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{63} 64$.

Rezolvare.

a) $\log_6 9 + \log_6 2^2 = \log_6(9\cdot 4) = \log_6 36 = 2$.

b) $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$, deci $2^{\log_4 9} = 2^{\log_2 3} = 3$; $25^{\log_5 2} = \left(5^{\log_5 2}\right)^2 = 2^2 = 4$. Suma: $3+4=7$.

c) Conform „lanțului” de logaritmi (Completarea 4): produsul este $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$.

Exercițiul 4

Logaritmați în baza 10 expresia $E = \dfrac{a^3\sqrt{b}}{10c^2}$, $a,b,c>0$.

Rezolvare. $\lg E = \lg\left(a^3 b^{\frac{1}{2}}\right) - \lg\left(10c^2\right) = 3\lg a + \dfrac{1}{2}\lg b - 1 - 2\lg c$.

Exercițiul 5

Fie $a=\lg 2$ și $b=\lg 3$. Exprimați în funcție de a și b: a) $\lg 1{,}5$; b) $\lg 0{,}18$; c) $\log_6 5$.

Rezolvare.

a) $\lg 1{,}5 = \lg\dfrac{3}{2} = \lg 3 - \lg 2 = b-a$.

b) $\lg 0{,}18 = \lg\dfrac{18}{100} = \lg(2\cdot 3^2) - \lg 10^2 = a+2b-2$.

c) $\log_6 5 = \dfrac{\lg 5}{\lg 6} = \dfrac{\lg\frac{10}{2}}{\lg(2\cdot 3)} = \dfrac{1-a}{a+b}$.

Exercițiul 6

Exprimați $\log_{12} 18$ în funcție de $a=\log_2 3$.

Rezolvare. Trecem în baza 2: $\log_{12} 18 = \dfrac{\log_2 18}{\log_2 12} = \dfrac{\log_2(2\cdot 3^2)}{\log_2(2^2\cdot 3)} = \dfrac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3} = \dfrac{1+2a}{2+a}$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exercițiul 7

Comparați numerele: a) $\log_3 7$ și $\log_7 3$; b) $\log_{0,5} 3$ și $\log_{0,5} 5$; c) $\log_2 3$ și $\log_3 5$.
Rezolvare.
a) $7 > 3 \Rightarrow \log_3 7 > \log_3 3 = 1$, iar $3 < 7 \Rightarrow \log_7 3 < \log_7 7 = 1$. Deci $\log_3 7 > \log_7 3$.
b) Baza $0{,}5 < 1$, deci sensul se schimbă: $3 < 5 \Rightarrow \log_{0,5} 3 > \log_{0,5} 5$.
c) Folosim numărul martor $\frac{3}{2}$. $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \log_2 3 > \frac{3}{2}$; $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27} > \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \log_3 5 < \frac{3}{2}$. Deci $\log_2 3 > \log_3 5$.

Exercițiul 8

Stabiliți semnul numerelor: $\log_{0,2} 7$; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$; $\lg \frac{\pi}{4}$; $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$.
Rezolvare. Folosim Completarea 2:

- $\log_{0,2} 7$: baza < 1, argumentul $> 1 \Rightarrow$ negativ;
- $\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$: baza și argumentul în $(0,1) \Rightarrow$ pozitiv;
- $\lg \frac{\pi}{4}$: baza $10 > 1$, iar $\frac{\pi}{4} < 1$ (deoarece $\pi < 4$) $\Rightarrow$ negativ;
- $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$: baza și argumentul sunt mai mari decât $1 \Rightarrow$ pozitiv.

Exercițiul 9

Arătați că, pentru orice $N > 0$, $N \neq 1$: $\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \frac{1}{\log_5 N} = \frac{1}{\log_{30} N}$.
Rezolvare. Din $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, membrul stâng este $\log_N 2 + \log_N 3 + \log_N 5 = \log_N (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log_N 30 = \frac{1}{\log_{30} N}$. Egalitatea este adevărată.

Exercițiul 10

Arătați că $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.
Rezolvare. Notăm $t = \log_2 3$. Cum $3 > 2$, avem $t > 1 > 0$, iar $\log_3 2 = \frac{1}{t}$. Atunci

$$t + \frac{1}{t} - 2 = \frac{t^2 - 2t + 1}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} > 0,$$

deoarece $t \neq 1$ și $t > 0$. Deci $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.

Exercițiul 11

Determinați câte cifre are numărul 3^{50}, știind că $\lg 3 \approx 0{,}47712$.
Rezolvare. $\lg 3^{50} = 50 \lg 3 \approx 23{,}856$, deci $[\lg 3^{50}] = 23$. Conform Completării 5, 3^{50} are $23 + 1 = 24$ de cifre.

Exercițiul 12

Calculați $[\log_2 100] + \left[\log_{\frac{1}{3}} 10\right]$.
Rezolvare. $2^6 = 64 < 100 < 128 = 2^7 \Rightarrow 6 < \log_2 100 < 7 \Rightarrow [\log_2 100] = 6$.

$\log_{\frac{1}{3}} 10 = -\log_3 10$, iar $3^2 = 9 < 10 < 27 = 3^3 \Rightarrow 2 < \log_3 10 < 3 \Rightarrow -3 < \log_{\frac{1}{3}} 10 < -2$, deci $\left[\log_{\frac{1}{3}} 10\right] = -3$.
Suma: $6 + (-3) = 3$.

Bibliografie

[1] M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Trunchi comun și curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2004.

[2] G. Constantinescu, C. Zîrna ș.a., *Pas cu pas prin matematică. Clasa a X-a*, Editura Crizon.