mateexamene.ro
Prof. Micu Elena

Lecția 6. Logaritmul unui număr pozitiv

Definiție, proprietăți imediate, condiții de existență

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără opere derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. Definiția logaritmului

Definiție

Fie $a>0$, $a\neq 1$ și $N>0$. **Logaritmul în baza a al numărului pozitiv** N este numărul real notat $\log_a N$, definit astfel:
$\log_a N$ *este exponentul (puterea) la care trebuie ridicată baza* a *pentru a obține numărul pozitiv dat* N.

$$\boxed{\log_a N = x \iff a^x = N} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

Numărul a se numește *baza* logaritmului, iar N se numește *argumentul* (numărul care se logaritmează).

Exemplu

$\log_3 81 = ?$ Căutăm exponentul x pentru care $3^x = 81$. Deoarece $3^4 = 81$, rezultă $\log_3 81 = 4$.

Exemple în baza $a=2$

$2^0 = 1 \Leftrightarrow \log_2 1 = 0$

$2^1 = 2 \Leftrightarrow \log_2 2 = 1$

$2^2 = 4 \Leftrightarrow \log_2 4 = 2$

$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$

$2^{-1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{1}{2} = -1$

$2^{-2} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{1}{4} = -2$

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$

$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow \log_2 \sqrt[3]{2} = \dfrac{1}{3}$

$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow \log_2 \sqrt[3]{4} = \dfrac{2}{3}$

$2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$

$2^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\dfrac{1}{3}$

$2^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = -\dfrac{2}{3}$

$5^{1+\sqrt{3}} = 5^{1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow \log_5 5^{1+\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$

2. Observații

Observația 1. Când există logaritmul?

Dacă $\log_a N = x \in \mathbb{R}$, atunci $a^x = N$. Cum $a > 0$, $a \neq 1$ și $a^x > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $N > 0$. Așadar:

$$\text{există } \log_a N \iff N > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Atenție

Nu au sens, de exemplu: $\log_2(-8)$ (argument negativ), $\log_3 0$ (argument nul), $\log_1 5$ (baza egală cu 1), $\log_{-2} 4$ (baza negativă).

Observația 2. Valori particulare

Pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a 1 = 0 \quad (\text{deoarece } a^0 = 1), \qquad \log_a a = 1 \quad (\text{deoarece } a^1 = a), \qquad \log_a a^n = n,\ n \in \mathbb{R}.$$

Observația 3. Identitatea logaritmică fundamentală

Din $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$, înlocuind x cu $\log_a N$, obținem

$$\boxed{a^{\log_a N} = N}, \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0.$$

Exemple

- $2^{\log_2 7} = 7$.
- $8^{\log_2 5} = \left(2^3\right)^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^3 = 5^3 = 125$.
  Am folosit regula $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$.

3. Logaritmi zecimali și logaritmi naturali

Notații

- Dacă $a = 10$, logaritmul se numește **logaritm zecimal** și se notează $\log_{10} N = \lg N$.
- Dacă $a = e$, unde $e \approx 2{,}718$ este un număr irațional ($e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), logaritmul se numește **logaritm natural** și se notează $\log_e N = \ln N$.

4. Condiții de existență pentru logaritmi care conțin o variabilă

Regulă

Expresia $\log_{g(x)} f(x)$ are sens dacă și numai dacă

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \end{cases} \qquad x \in D_f \cap D_g,$$

unde D_f, D_g sunt domeniile pe care sunt definite expresiile $f(x)$ și $g(x)$. Mulțimea valorilor lui x care verifică toate condițiile se numește *domeniul de existență* al logaritmului.

Atenție

Când baza conține variabila x, nu uitați cele *două* condiții pentru bază: $g(x)>0$ *și* $g(x)\neq 1$. La final, se face *intersecția* tuturor condițiilor.

5. Exerciții rezolvate

Exercițiul 1

Calculați: $\log_2 4$; $\log_4 256$; $\log_3 0{,}(3)$; $\log_5 0{,}04$; $\log_{0,5} 2$; $\log_{\frac{1}{3}} 81$; $\log_\pi \dfrac{1}{\pi^3}$; $\lg 0{,}001$; $\lg 10$; $\ln e^5$.
Rezolvare. Scriem argumentul ca putere a bazei.

- $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$
- $\log_4 256 = \log_4 4^4 = 4$
- $\log_3 0{,}(3) = \log_3 \dfrac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$
- $\log_5 0{,}04 = \log_5 \dfrac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$
- $\log_{0,5} 2 = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$
- $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = -4$
- $\log_\pi \dfrac{1}{\pi^3} = \log_\pi \pi^{-3} = -3$
- $\lg 0{,}001 = \lg 10^{-3} = -3$
- $\lg 10 = 1$
- $\ln e^5 = 5$

Exercițiul 2

Exprimați x cu ajutorul logaritmilor: a) $2^x = 3$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 5$; c) $e^x = 2$; d) $10^x = \frac{1}{5}$; e) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 10$; f) $\pi^x = e$.
Rezolvare. Aplicăm definiția: $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$.

a) $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{3}} 5$
c) $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_e 2 = \ln 2$
d) $10^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \lg \frac{1}{5}$
e) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{4}} 10$
f) $\pi^x = e \Leftrightarrow x = \log_\pi e$

Exercițiul 3

Determinați valorile reale ale lui x pentru care au sens expresiile:
a) $\log_3(x+4)$; b) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$; c) $\log_4(x^2-4)$; d) $\log_{\frac{1}{3}}(9-x^2)$; e) $\lg(-x^2+x+2)$; f) $\ln(x^2+25)$; g) $\ln(-x)$; h) $\log_{x+1} 3$; i) $\log_{x^2-1} 10$; j) $\log_x(3-x)$; k) $\lg \dfrac{x+4}{3-x}$; l) $\ln\sqrt{9-x^2}$.
Rezolvare.
a) Condiția: $x+4>0 \Rightarrow x>-4$, deci $x\in(-4,+\infty)$.
b) Condiția: $2-x>0 \Rightarrow x<2$, deci $x\in(-\infty,2)$.
c) Condiția: $x^2-4>0$. Rădăcinile ecuației $x^2-4=0$, adică $(x-2)(x+2)=0$, sunt $x\in\{-2,2\}$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	

Deci $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.
d) Condiția: $9-x^2>0$. Din $9-x^2=0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x)=0$ obținem $x\in\{-3,3\}$.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$9-x^2$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	

Deci $x\in(-3,3)$.

e) Condiția: $-x^2+x+2>0$. Pentru $-x^2+x+2=0$: $\Delta=b^2-4ac=1-4\cdot(-1)\cdot 2=9$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1\pm 3}{-2}$, deci $x_1=-1$, $x_2=2$. Trinomul are semnul lui $a=-1$ (negativ) în afara rădăcinilor și semn contrar între rădăcini:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	

Deci $x\in(-1,2)$.
f) Condiția: $x^2+25>0$, adevărată pentru orice x real (suma dintre un pătrat și un număr pozitiv). Deci $x\in\mathbb{R}$.
g) Condiția: $-x>0\Rightarrow x<0$, deci $x\in(-\infty,0)$.
h) Argumentul $3>0$. Condițiile pentru bază: $\begin{cases}x+1>0\\x+1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-1\\x\neq 0\end{cases}$, deci $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$.
i) Argumentul $10>0$. Condițiile pentru bază: $\begin{cases}x^2-1>0\\x^2-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2>1\\x^2\neq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|>1\\x\neq\pm\sqrt{2}\end{cases}$.
Deci $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.
j) $\begin{cases}3-x>0\\x>0\\x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\x>0\\x\neq 1\end{cases}$, deci $x\in(0,1)\cup(1,3)$.
k) Condiția: $\dfrac{x+4}{3-x}>0$, cu $x\neq 3$. Rădăcinile: $x+4=0\Rightarrow x=-4$; $3-x=0\Rightarrow x=3$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x+4$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	$+$	$+\ +\ +$	
$3-x$		$+\ +\ +$	$+$	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	
$\dfrac{x+4}{3-x}$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	$\|$	$-\ -\ -$	

Deci $x\in(-4,3)$.
l) Condiția: $\sqrt{9-x^2}>0\Leftrightarrow 9-x^2>0$, deci (ca la d) $x\in(-3,3)$.

Exercițiul 4

Determinați valorile reale ale lui x pentru care au sens expresiile:

a) $\log_{x+2}(15+2x-x^2)$; b) $\log_{4-x}(x^2-x-6)$; c) $\log_{x^2}\sqrt{x^2-11x+18}$; d) $\lg\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-4x}}$; e) $\log_6\left(\sqrt{x+4}-3\right)$; f) $\log_{[x]}(2x-1)$; g) $\lg[x+3]$; h) $\ln(|3x+1|-4)$.
($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.)
Rezolvare.
a) Baza: $\begin{cases}x+2>0\\x+2\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-2\\x\neq -1\end{cases}$, adică $x\in(-2,+\infty)\setminus\{-1\}$.
Argumentul: $15+2x-x^2>0$. Pentru $-x^2+2x+15=0$: $\Delta=4-4\cdot(-1)\cdot 15=64$, $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm 8}{-2}$, deci $x_1=-3$, $x_2=5$. Trinomul (cu $a=-1<0$) este pozitiv între rădăcini: $x\in(-3,5)$.
Intersectând: $x\in(-2,-1)\cup(-1,5)$.

b) Baza: $\begin{cases} 4-x>0 \\ 4-x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x\neq 3 \end{cases}$, adică $x\in(-\infty,4)\setminus\{3\}$.
Argumentul: $x^2-x-6>0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.
Intersectând: $x\in(-\infty,-2)\cup(3,4)$.
c) Baza: $\begin{cases} x^2>0 \\ x^2\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 1 \end{cases}$.
Argumentul: $\sqrt{x^2-11x+18}>0 \Leftrightarrow x^2-11x+18>0$. Pentru $x^2-11x+18=0$: $\Delta=121-72=49$, $x_1=\dfrac{11-7}{2}=2$, $x_2=\dfrac{11+7}{2}=9$; trinomul este pozitiv în afara rădăcinilor: $x\in(-\infty,2)\cup(9,+\infty)$.
Intersectând: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(9,+\infty)$.
d) Condiția: $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-4x}}>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{x^2-4x}>0$. Rădăcinile numărătorului: $x\in\{-2,2\}$; ale numitorului: $x(x-4)=0\Rightarrow x\in\{0,4\}$.

x	$-\infty$		-2		0		2		4		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x^2-4x		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-4}{x^2-4x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Deci $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)\cup(4,+\infty)$.
e) Radicalul există pentru $x+4\geqslant 0$. Argumentul: $\sqrt{x+4}-3>0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4}>3 \Leftrightarrow x+4>9 \Leftrightarrow x>5$. Deci $x\in(5,+\infty)$.
f) Baza: $\begin{cases} [x]>0 \\ [x]\neq 1 \end{cases}$. Cum $[x]\in\mathbb{Z}$, rezultă $[x]\geqslant 2$, adică $x\geqslant 2$.
Argumentul: $2x-1>0\Rightarrow x>\dfrac{1}{2}$, condiție îndeplinită pentru $x\geqslant 2$. Deci $x\in[2,+\infty)$.
g) Condiția: $[x+3]>0 \Leftrightarrow [x]+3>0 \Leftrightarrow [x]>-3$. Cum $[x]\in\mathbb{Z}$, obținem $[x]\geqslant -2$, adică $x\geqslant -2$. Deci $x\in[-2,+\infty)$.
h) Condiția: $|3x+1|-4>0 \Leftrightarrow |3x+1|>4$, adică $3x+1>4\Rightarrow x>1$ sau $3x+1<-4\Rightarrow x<-\dfrac{5}{3}$. Deci $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

Exercițiul 5

Determinați valorile reale ale lui x pentru care au sens expresiile: a) $\log_2(2x-5)$; b) $\log_{0,5}(x^2-x+2)$; c) $\log_x(x^2-1)$; d) $\log_{x^2}|x|$.
Rezolvare.
a) $2x-5>0\Rightarrow 2x>5\Rightarrow x>\dfrac{5}{2}$, deci $x\in\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.
b) $x^2-x+2>0$. Pentru $x^2-x+2=0$: $\Delta=1-8=-7<0$, deci trinomul are peste tot semnul lui $a=1>0$. Așadar $x\in\mathbb{R}$.
c) Baza: $x>0, x\neq 1$. Argumentul: $x^2-1>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.
Intersectând: $x\in(1,+\infty)$.
d) Baza: $x^2>0, x^2\neq 1$, adică $x\neq 0, x\neq\pm 1$. Argumentul: $|x|>0\Leftrightarrow x\neq 0$. Deci $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

Bibliografie

[1] M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Trunchi comun și curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2004.

[2] G. Constantinescu, C. Zîrna ș.a., *Pas cu pas prin matematică. Clasa a X-a*, Editura Crizon.