mateexamene.ro
Prof. Micu Elena

Lecția 7. Proprietățile logaritmilor

Reguli de calcul cu logaritmi și demonstrațiile lor

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără opere derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. Logaritmul unui produs

Proprietatea P1

$$\boxed{\log_a(A\cdot B)=\log_a A+\log_a B}, \qquad \forall A,B>0,\ a>0,\ a\neq 1.$$

Demonstrație. Notăm $\log_a A=x\Rightarrow a^x=A$ și $\log_a B=y\Rightarrow a^y=B$. Atunci $A\cdot B=a^x\cdot a^y=a^{x+y}$, deci

$$\log_a(A\cdot B)=\log_a a^{x+y}=x+y=\log_a A+\log_a B.$$

Observații

- P1 admite generalizare: pentru $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, $a>0$, $a\neq 1$, $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\log_a(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)=\log_a a_1+\log_a a_2+\ldots+\log_a a_n.$$

- Dacă nu cunoaștem semnul numerelor A și B, dar știm că $A\cdot B>0$, atunci

$$\log_a(A\cdot B)=\log_a|A|+\log_a|B|.$$

2. Logaritmul unui cât

Proprietatea P2

$$\boxed{\log_a\frac{A}{B}=\log_a A-\log_a B}, \qquad \forall A,B>0,\ a>0,\ a\neq 1.$$

Demonstrație. Cu notațiile de la P1, $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$, deci $\log_a\dfrac{A}{B}=x-y=\log_a A-\log_a B$.

Caz particular. Pentru $A=1$: $\log_a\dfrac{1}{B}=\log_a 1-\log_a B=0-\log_a B$, adică

$$\log_a\frac{1}{B}=-\log_a B, \qquad B>0.$$

3. Logaritmul unei puteri și al unui radical

Proprietatea P3

Pentru $m \in \mathbb{N}^*$, aplicând P1 de m ori:

$$\log_a(A^m) = \log_a(\underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ factori}}) = \underbrace{\log_a A + \log_a A + \ldots + \log_a A}_{\text{de } m \text{ ori}} = m \cdot \log_a A.$$

Regula rămâne adevărată pentru orice exponent real:

$$\boxed{\log_a(A^m) = m \cdot \log_a A}, \qquad \forall A > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ m \in \mathbb{R}.$$

Justificare pentru $m \in \mathbb{R}$: dacă $\log_a A = x$, atunci $A^m = (a^x)^m = a^{mx}$, deci $\log_a A^m = mx = m \log_a A$.

Proprietatea P4

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}}, \qquad \forall A > 0,\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant 2.$$

Demonstrație. $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$, deci, conform P3, $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n} \log_a A$.

Atenție

- $\log_a(A+B) \neq \log_a A + \log_a B$ și $\log_a(A-B) \neq \log_a A - \log_a B$ (în general).
- $\log_a(A \cdot B) \neq \log_a A \cdot \log_a B$ și $\log_a \dfrac{A}{B} \neq \dfrac{\log_a A}{\log_a B}$ (în general).
- Dacă semnul lui A nu este cunoscut: $\log_a A^2 = 2\log_a |A|$, pentru $A \neq 0$ (nu $2\log_a A$).

4. Formula de schimbare a bazei

Proprietatea P5

Pentru $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ și $A > 0$:

$$\boxed{\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}} \quad (b \text{ este noua bază}), \qquad \text{echivalent} \qquad \log_b a \cdot \log_a A = \log_b A.$$

Demonstrație. Fie $\log_a A = x$, deci $A = a^x$. Logaritmăm în baza b: $\log_b A = \log_b a^x = x \log_b a$. Cum $\log_b a \neq 0$ (deoarece $a \neq 1$), obținem $x = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$.

5. Consecințe utile

Proprietatea P6

$$\boxed{\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}}, \qquad a > 0,\ a \neq 1,\ n \neq 0.$$

Demonstrație. Dacă $\log_{a^n} a^m = x$, atunci $(a^n)^x = a^m \Rightarrow a^{nx} = a^m \Rightarrow nx = m \Rightarrow x = \dfrac{m}{n}$.

Proprietatea P7

$$\boxed{\log_{b^n} a^n = \log_b a}, \qquad a,b>0,\ b\neq 1,\ n\neq 0.$$

Demonstrație. Dacă $\log_{b^n} a^n = x$, atunci $(b^n)^x = a^n \Rightarrow (b^x)^n = a^n \Rightarrow b^x = a$ (numerele a și b^x sunt pozitive), deci $x = \log_b a$.
Mai general: $\log_{b^n} a^m = \dfrac{m}{n}\log_b a$.

Proprietatea P8

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}, \qquad a,b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1.$$

Demonstrație. Din P5, cu noua bază b: $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$.

6. Exerciții rezolvate

Exercițiul 1

Calculați:
a) $\log_8 16 + 2\log_8 2 = \log_8 16 + \log_8 2^2 = \log_8(16\cdot 4) = \log_8 64 = \log_8 8^2 = 2$.
b) $\log_{18} 3 + \log_{18} 6 = \log_{18}(3\cdot 6) = \log_{18} 18 = 1$.
c) $\log_{15} 25 + \log_{15} 9 = \log_{15}(25\cdot 9) = \log_{15} 225 = \log_{15} 15^2 = 2$.
d) $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \dfrac{100}{4} = \log_5 25 = 2$.
e) $\log_6 11 - \log_6 \dfrac{11}{216} = \log_6\left(11\cdot\dfrac{216}{11}\right) = \log_6 216 = \log_6 6^3 = 3$.
f) $\log_{\frac{1}{5}} 7 - \log_{\frac{1}{5}} 175 = \log_{\frac{1}{5}} \dfrac{7}{175} = \log_{\frac{1}{5}} \dfrac{1}{25} = \log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = 2$.
g) $\log_4 28 + \log_4 44 - \log_4 22 + \log_4 \dfrac{1}{7} = \log_4\left(\dfrac{28\cdot 44}{22}\cdot\dfrac{1}{7}\right) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \dfrac{3}{2}$ (P6).
h) $\log_6 12 + \log_6 5 - \log_6 10 = \log_6 \dfrac{12\cdot 5}{10} = \log_6 6 = 1$.

Exercițiul 2

Calculați:
a) $\log_2 24 + \log_2 36 - \log_2 48 - \log_2 72 = \log_2(24\cdot 36) - \log_2(48\cdot 72) = \log_2 \dfrac{24\cdot 36}{48\cdot 72} = \log_2 \dfrac{1}{4} = -2$.
b) $\log_4 6 + \log_4 8 + \log_4 9 - \log_4 27 = \log_4 \dfrac{6\cdot 8\cdot 9}{27} = \log_4 16 = 2$.
c) $\log_3 1{,}8 + \log_3 2{,}5 + \log_3 6 = \log_3\left(\dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot 6\right) = \log_3 27 = 3$.
d) $\lg 5{,}6 + \lg 17{,}5 - \lg 24{,}5 = \lg \dfrac{5{,}6\cdot 17{,}5}{24{,}5} = \lg \dfrac{98}{24{,}5} = \lg 4$.
e) $\log_6 24 + \log_6 15 - \log_6 10 = \log_6 \dfrac{24\cdot 15}{10} = \log_6 36 = 2$.
f) $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{1}{2}} 6 + \log_{\frac{1}{2}} 24 - \log_{\frac{1}{2}} 216 = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3\cdot 6\cdot 24}{216} = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$.

Exercițiul 3

Calculați:

a) $\log_3 6+\log_3 8-2\log_3 4=\log_3 6+\log_3 8-\log_3 16=\log_3 \dfrac{6\cdot 8}{16}=\log_3 3=1.$

b) $3\log_3 2+\log_3 45-2\log_3 2\sqrt{10}=\log_3 2^3+\log_3 45-\log_3\left(2\sqrt{10}\right)^2=\log_3 \dfrac{8\cdot 45}{40}=\log_3 9=2.$

Am folosit $\left(2\sqrt{10}\right)^2=4\cdot 10=40.$

c) $\lg 24{,}5-\lg 14-\lg 17{,}5=\lg \dfrac{24{,}5}{14\cdot 17{,}5}=\lg \dfrac{24{,}5}{245}=\lg \dfrac{1}{10}=-1.$

d) $2\log_4 3+3\log_4 10-\log_4 2250=\log_4 \dfrac{3^2\cdot 10^3}{2250}=\log_4 \dfrac{9000}{2250}=\log_4 4=1.$

e) $3\log_3 2+\log_3 150-4\log_3 2\sqrt{5}=\log_3 \dfrac{2^3\cdot 150}{\left(2\sqrt{5}\right)^4}=\log_3 \dfrac{1200}{400}=\log_3 3=1.$

Am folosit $\left(2\sqrt{5}\right)^4=2^4\cdot\left(\sqrt{5}\right)^4=16\cdot 25=400.$

Exercițiul 4

Calculați:

a) $\log_2 \dfrac{1}{2}+3\log_5\sqrt{5}-6\log_7 49.$

$\log_2 \dfrac{1}{2}=-1;\quad 3\log_5\sqrt{5}=3\log_5 5^{\frac{1}{2}}=3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2};\quad 6\log_7 49=6\cdot 2=12.$

Suma: $-1+\dfrac{3}{2}-12=-\dfrac{23}{2}.$

b) $S=2+2\log_2 4+3\log_3 9+\ldots+10\log_{10}100.$

Fiecare logaritm are forma $\log_k k^2=2$, deci $S=2+2\cdot 2+3\cdot 2+\ldots+10\cdot 2=2+4+6+\ldots+20=2\cdot(1+2+\ldots+10)=2\cdot 55=110.$

Exercițiul 5

Calculați:

a) $(\log_3 36)\left(\log_{\sqrt{6}} 3\right)-(\log_5 8)\left(\log_{2\sqrt{2}} 5\right).$

$\log_3 36=\log_3 6^2=2\log_3 6;\quad \log_{\sqrt{6}} 3=\dfrac{\log_3 3}{\log_3 6^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_3 6}=\dfrac{2}{\log_3 6};$

$\log_5 8=\log_5 2^3=3\log_5 2;\quad \log_{2\sqrt{2}} 5=\log_{2^{\frac{3}{2}}} 5=\dfrac{\log_5 5}{\log_5 2^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}\log_5 2}=\dfrac{2}{3\log_5 2}.$

Expresia: $2\log_3 6\cdot\dfrac{2}{\log_3 6}-3\log_5 2\cdot\dfrac{2}{3\log_5 2}=4-2=2.$

b) $(\log_2 3)(\log_3 5)(\log_5 4)$. Trecem în baza 2 (P5):

$$\log_2 3\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 5}=\log_2 4=2.$$

c) $81^{\left(\log_2\sqrt{3}\right)\left(\log_3\sqrt{2}\right)}.$

$\log_2\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\log_2 3;\quad \log_3\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\log_3 2=\dfrac{1}{2\log_2 3}$ (P8). Produsul exponenților: $\dfrac{1}{2}\log_2 3\cdot\dfrac{1}{2\log_2 3}=\dfrac{1}{4}.$

Deci $81^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3^4}=3.$

d) $\sqrt{16^{\log_4 12}+9^{\log_3 5}-4^{\log_2\sqrt{48}}}$.

$16^{\log_4 12}=\left(4^{\log_4 12}\right)^2=12^2=144$; $9^{\log_3 5}=\left(3^{\log_3 5}\right)^2=5^2=25$; $4^{\log_2\sqrt{48}}=\left(2^{\log_2\sqrt{48}}\right)^2=\left(\sqrt{48}\right)^2=48$.

Expresia: $\sqrt{144+25-48}=\sqrt{121}=11$.

e) $\dfrac{\log_2 10}{\log_{20}2}-\dfrac{\log_2 5}{\log_{40}2}$.

Din P8: $\dfrac{1}{\log_{20}2}=\log_2 20$, $\dfrac{1}{\log_{40}2}=\log_2 40$. Expresia devine $\log_2 10\cdot\log_2 20-\log_2 5\cdot\log_2 40$.

Notăm $\log_2 5=x$. Atunci $\log_2 10=\log_2(2\cdot 5)=1+x$, $\log_2 20=\log_2(4\cdot 5)=2+x$, $\log_2 40=\log_2(8\cdot 5)=3+x$.

Expresia: $(1+x)(2+x)-x(3+x)=x^2+3x+2-3x-x^2=2$.

f) $\log_{\frac{1}{2}}5+\log_2 15-\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{1}{9}$.

$\log_{\frac{1}{2}}5=\log_{2^{-1}}5=-\log_2 5$; $\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{1}{9}=\log_{2^{-2}}3^{-2}=\log_2 3$ (P7).

Expresia: $-\log_2 5+\log_2 15-\log_2 3=\log_2\dfrac{15}{5\cdot 3}=\log_2 1=0$.

g) $6^{\frac{1}{\log_3 6}+\frac{1}{2}\log_6 9}+7^{\frac{1}{\log_4 49}}$.

$\dfrac{1}{\log_3 6}=\log_6 3$ (P8); $\dfrac{1}{2}\log_6 9=\log_6 9^{\frac{1}{2}}=\log_6 3$; $\dfrac{1}{\log_4 49}=\log_{49}4=\log_{7^2}2^2=\log_7 2$ (P7).

Expresia: $6^{2\log_6 3}+7^{\log_7 2}=\left(6^{\log_6 3}\right)^2+2=9+2=11$.

Bibliografie

[1] M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Trunchi comun și curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2004.

[2] G. Constantinescu, C. Zîrna ș.a., *Pas cu pas prin matematică. Clasa a X-a*, Editura Crizon.