Lecția 8. Logaritmarea unei expresii

Exprimarea logaritmului unei expresii prin logaritmii factorilor

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără opere derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. Ce înseamnă „a logaritma o expresie”?

Uneori, pentru a estima un număr real pozitiv, calculăm logaritmul său într-o bază convenabil aleasă (de obicei baza 10) și căutăm valoarea în tabelele de logaritmi (astăzi, cu ajutorul calculatorului).

Definiție

Fie E o expresie cu valori strict pozitive și $a>0$, $a\neq 1$. **A logaritma expresia E în baza a** înseamnă a scrie $\log_a E$, cu ajutorul proprietăților logaritmilor, ca o sumă (diferență) de logaritmi ai factorilor care intră în E, înmulțiți cu exponenții corespunzători.

Regulile folosite (pentru $A,B>0$, $a>0$, $a\neq 1$)

produs:	$\log_a(A\cdot B)=\log_a A+\log_a B$
cât:	$\log_a \dfrac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$
putere:	$\log_a A^m=m\log_a A,\ m\in\mathbb{R}$
radical:	$\log_a \sqrt[n]{A}=\dfrac{1}{n}\log_a A,\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2$
radical dintr-o putere:	$\log_a \sqrt[n]{A^m}=\dfrac{m}{n}\log_a A$

Exemplu

Logaritmați în baza a ($a>0$, $a\neq 1$) expresia $E=\dfrac{x^2\sqrt[3]{y}}{z^4}$, unde $x,y,z>0$.

Rezolvare.

$$\begin{aligned}
\log_a E &= \log_a \frac{x^2\sqrt[3]{y}}{z^4} = \log_a\left(x^2\sqrt[3]{y}\right)-\log_a z^4 && \text{(logaritmul unui cât)}\\
&= \log_a x^2+\log_a \sqrt[3]{y}-4\log_a z && \text{(logaritmul unui produs, al unei puteri)}\\
&= 2\log_a x+\frac{1}{3}\log_a y-4\log_a z && \text{(logaritmul unei puteri, al unui radical)}
\end{aligned}$$

Atenție

- Se logaritmează doar produse, câturi, puteri și radicali. O sumă sau o diferență *nu* se „desparte”: $\lg(a+b)\neq \lg a+\lg b$.

- Toate numerele care se logaritmează trebuie să fie strict pozitive.
- Înainte de logaritmare, este util să scriem radicalii ca puteri cu exponent rațional: $\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}$.

2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 1

Logaritmați în baza 10 **expresiile următoare, unde** $a,b,c,x,y > 0$**:**

a) $E = 5a^4\sqrt[6]{b^5}\,c^3$.

$E = 5\cdot a^4\cdot b^{\frac{5}{6}}\cdot c^3$, deci $\lg E = \lg 5 + 4\lg a + \frac{5}{6}\lg b + 3\lg c$.

b) $E = \left(8a^2b^4\right) : \left(3x\sqrt{y}\right)$.

$$\lg E = \lg\left(8a^2b^4\right) - \lg\left(3x\sqrt{y}\right) = (\lg 8 + 2\lg a + 4\lg b) - \left(\lg 3 + \lg x + \tfrac{1}{2}\lg y\right),$$

adică $\lg E = 3\lg 2 + 2\lg a + 4\lg b - \lg 3 - \lg x - \frac{1}{2}\lg y$ (am folosit $\lg 8 = \lg 2^3 = 3\lg 2$).

c) $E = 8\sqrt[3]{4a^2b^3}$.

Scriem cu puteri: $E = 2^3\cdot 4^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b = 2^3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b = 2^{\frac{11}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b$.

Deci $\lg E = \frac{11}{3}\lg 2 + \frac{2}{3}\lg a + \lg b$.

d) $E = \left(a^2\sqrt{b}\right) : \left(b^2\sqrt[3]{a}\right)$.

$E = \dfrac{a^2\cdot b^{\frac{1}{2}}}{b^2\cdot a^{\frac{1}{3}}} = a^{2-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}-2} = a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{-\frac{3}{2}}$.

Deci $\lg E = \frac{5}{3}\lg a + \left(-\frac{3}{2}\lg b\right) = \frac{5}{3}\lg a - \frac{3}{2}\lg b$.

e) $E = \dfrac{4a^3\sqrt[3]{8a^2b^3}}{3\sqrt[4]{a^5b^2}}$.

$\sqrt[3]{8a^2b^3} = 2a^{\frac{2}{3}}b$ și $\sqrt[4]{a^5b^2} = a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{1}{2}}$, deci $E = \dfrac{4\cdot 2\cdot a^{3+\frac{2}{3}}\cdot b}{3\cdot a^{\frac{5}{4}}\cdot b^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{3}\cdot a^{\frac{11}{3}-\frac{5}{4}}\cdot b^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}\cdot a^{\frac{29}{12}}\cdot b^{\frac{1}{2}}$.

Deci $\lg E = \lg 8 - \lg 3 + \frac{29}{12}\lg a + \frac{1}{2}\lg b = 3\lg 2 - \lg 3 + \frac{29}{12}\lg a + \frac{1}{2}\lg b$.

Exercițiul 2

Știind că $\lg 8 \approx 0{,}90309$ **și** $\lg 3 \approx 0{,}47712$**, calculați aproximativ:** a) $\lg 24$; b) $\lg 0{,}03$; c) $\lg 80$.

Rezolvare.

a) $\lg 24 = \lg(3\cdot 8) = \lg 3 + \lg 8 \approx 0{,}47712 + 0{,}90309 = 1{,}38021$.

b) $\lg 0{,}03 = \lg\dfrac{3}{100} = \lg 3 - \lg 100 = \lg 3 - 2 \approx 0{,}47712 - 2 = -1{,}52288$.

c) $\lg 80 = \lg(8\cdot 10) = \lg 8 + \lg 10 \approx 0{,}90309 + 1 = 1{,}90309$.

Exercițiul 3

Exprimați logaritmul cerut în funcție de logaritmul dat:

a) $\log_6 27$, știind că $b = \log_3 16$.

$b = \log_3 2^4 = 4\log_3 2$, deci $\log_3 2 = \dfrac{b}{4}$. Trecem în baza 3:

$$\log_6 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 6} = \frac{3}{\log_3(2\cdot 3)} = \frac{3}{\log_3 2 + 1} = \frac{3}{\frac{b}{4}+1} = \frac{3}{\frac{4+b}{4}} = \frac{12}{4+b}.$$

b) $\log_{24} 2$, știind că $c = \log_{24} 3$.

$c = \log_{24} 3 = \log_{24} \dfrac{24}{8} = \log_{24} 24 - \log_{24} 8 = 1 - 3\log_{24} 2$.

Notând $\log_{24} 2 = x$: $c = 1 - 3x \Rightarrow 3x = 1 - c \Rightarrow x = \dfrac{1-c}{3}$.

c) $\log_6 16$, știind că $a = \log_{12} 27$.

Notăm $t = \log_2 3$. Trecem în baza 2: $a = \log_{12} 27 = \dfrac{\log_2 3^3}{\log_2 (4 \cdot 3)} = \dfrac{3t}{2+t}$, deci $a(2+t) = 3t \Rightarrow 2a = t(3-a) \Rightarrow t = \dfrac{2a}{3-a}$.

Atunci

$$\log_6 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 6} = \frac{4}{1+t} = \frac{4}{1+\frac{2a}{3-a}} = \frac{4}{\frac{3+a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}.$$

Bibliografie

[1] M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Trunchi comun și curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2004.

[2] G. Constantinescu, C. Zîrna ș.a., *Pas cu pas prin matematică. Clasa a X-a*, Editura Crizon.