Lecția 9. Aplicații diverse

Calcule, demonstrații și expresii cu logaritmi

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără opere derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. O proprietate utilă

Proprietate

Pentru $a, c > 0$ și $b > 0$, $b \neq 1$:

$$\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$$

Demonstrație. Notăm $x = a^{\log_b c}$ și $y = c^{\log_b a}$; ambele numere sunt pozitive. Calculăm $\log_b x$ și $\log_b y$ și arătăm că sunt egale:

$$\log_b x = \log_b\left(a^{\log_b c}\right) = \log_b c \cdot \log_b a, \qquad \log_b y = \log_b\left(c^{\log_b a}\right) = \log_b a \cdot \log_b c.$$

Deci $\log_b x = \log_b y$, de unde $x = y$.

Reamintim

- Identitatea logaritmică fundamentală: $a^{\log_a N} = N$.
- $a^{u-v} = a^u : a^v$, deci, de exemplu, $3^{1-\log_3 10} = 3 : 3^{\log_3 10} = \dfrac{3}{10}$.
- P6: $\log_{a^n} a^m = \dfrac{m}{n}$; P7: $\log_{b^n} a^n = \log_b a$; P8: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Atenție

La logaritmii „suprapuși” (de tipul $\log_a(\log_b(\log_c N))$) se calculează întâi logaritmul din interior, apoi se continuă spre exterior.

2. Exerciții rezolvate

Exercițiul 1 (logaritmi suprapuși)

Calculați:

a) $\log_2(\log_3(\log_4 64))$: $\log_4 64 = 3$, $\log_3 3 = 1$, $\log_2 1 = 0$.

b) $\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\sqrt{5}} 625\right)$: $\log_{\sqrt{5}} 625 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^4 = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} = 8$; $\log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^3 = \dfrac{3}{\frac{1}{2}} = 6$.

c) $\log_4\left[\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{512}\right)\right]$: $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{512} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = 9$; $\log_3 9 = 2$; $\log_4 2 = \log_{2^2} 2 = \dfrac{1}{2}$.

d) $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_{\sqrt{6}}(\log_3 729)\right]$: $\log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$; $\log_{\sqrt{6}} 6 = 2$; $\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$.

e) $\log_{\frac{49}{4}}\left(\log_4 6^{\log_6 128}\right)$: $6^{\log_6 128}=128$; $\log_4 128=\log_{2^2}2^7=\frac{7}{2}$; $\log_{\frac{49}{4}}\frac{7}{2}=\log_{\left(\frac{7}{2}\right)^2}\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$.

f) $\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_5 3^{\log_3\sqrt[3]{25}}\right)$: $3^{\log_3\sqrt[3]{25}}=\sqrt[3]{25}$; $\log_5\sqrt[3]{25}=\log_5 5^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$; $\log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}=1$.

g) Fie $E_1=\log_2(1+\log_2 128)$ și $E_2=\log_4(1+\log_3 E_1)$. Calculați E_1 și E_2.

$E_1=\log_2(1+7)=\log_2 8=3$; $\quad E_2=\log_4(1+\log_3 3)=\log_4 2=\frac{1}{2}$.

Exercițiul 2

Calculați:

a) $\log_2 2\sqrt{32}=\log_2\left(2\cdot\sqrt{2^5}\right)=\log_2\left(2\cdot 2^{\frac{5}{2}}\right)=\log_2 2^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2}$.

b) $\log_3\left(\sqrt{3}\cdot 27\right)=\log_3\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^3\right)=\log_3 3^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2}$.

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\sqrt{125}=\log_{5^{-\frac{1}{2}}}5^{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3$ (P6).

d) $3^{\log_3 5}+2^{\log_2 3}=5+3=8$.

e) $4^{\log_2 25}+4^{\log_2 9}=\left(2^{\log_2 25}\right)^2+\left(2^{\log_2 9}\right)^2=25^2+9^2=625+81=706$.

f) $\log_3 5+\log_3 5{,}4=\log_3(5\cdot 5{,}4)=\log_3 27=3$.

g) $\lg 50+\lg 25-\lg 1{,}25=\lg\frac{50\cdot 25}{1{,}25}=\lg 1000=3$.

h) $7^{\frac{\lg(\lg 5)}{\lg 7}}=7^{\log_7(\lg 5)}=\lg 5$ (formula de schimbare a bazei, apoi identitatea fundamentală).

i) $\frac{\log_{\sqrt{5}}81}{\log_{125}3\sqrt{3}}=\frac{\log_{5^{\frac{1}{2}}}3^4}{\log_{5^3}3^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{4}{\frac{1}{2}}\log_5 3}{\frac{3}{\frac{2}{3}}\log_5 3}=\frac{8\log_5 3}{\frac{1}{2}\log_5 3}=16$.

j) $3^{2-\log_3 10}-4^{1-\log_4 5}+6^{\log_6 9-1}=\frac{3^2}{3^{\log_3 10}}-\frac{4}{4^{\log_4 5}}+\frac{6^{\log_6 9}}{6}=\frac{9}{10}-\frac{4}{5}+\frac{9}{6}=\frac{9}{10}-\frac{8}{10}+\frac{15}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$.

Exercițiul 3

Arătați că:

a) $3^{1-\log_3 10}-4^{1-\log_4 5}+6^{\log_6 9-1}=1$.

$3^{1-\log_3 10}=\frac{3}{10}$; $\quad 4^{1-\log_4 5}=\frac{4}{5}$; $\quad 6^{\log_6 9-1}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$. $\quad$ Deci $\frac{3}{10}-\frac{8}{10}+\frac{15}{10}=\frac{10}{10}=1$.

b) $\log_2\sqrt{2}+6\log_4\sqrt[6]{2+\sqrt{2}}+\frac{5}{2}\log_2\sqrt[5]{2-\sqrt{2}}=1$.

$\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$;

$6\log_4\sqrt[6]{2+\sqrt{2}}=\log_4(2+\sqrt{2})=\frac{\log_2(2+\sqrt{2})}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(2+\sqrt{2})$;

$\frac{5}{2}\log_2\sqrt[5]{2-\sqrt{2}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}\log_2(2-\sqrt{2})=\frac{1}{2}\log_2(2-\sqrt{2})$.

Ultimii doi termeni: $\frac{1}{2}\log_2\left[(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})\right]=\frac{1}{2}\log_2(4-2)=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$.

Suma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

c) $\log_{13}\sqrt[3]{169}+\log_{13}\sqrt{4+\sqrt{3}}+\log_{13}\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}}}+\log_{13}\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{3}}}=\frac{7}{6}$.

$\log_{13}\sqrt[3]{169}=\log_{13}13^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro

Licență CC BY-NC-ND 4.0

Ultimii doi termeni: $\log_{13}\sqrt{\left(3+\sqrt{5+\sqrt{3}}\right)\left(3-\sqrt{5+\sqrt{3}}\right)} = \log_{13}\sqrt{9-\left(5+\sqrt{3}\right)} = \log_{13}\sqrt{4-\sqrt{3}}$.

Atunci $\log_{13}\sqrt{4+\sqrt{3}}+\log_{13}\sqrt{4-\sqrt{3}} = \log_{13}\sqrt{16-3} = \log_{13}\sqrt{13} = \frac{1}{2}$.

Suma: $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$.

d) $\log_2 4^{\sqrt{2}}\cdot\left(\log_3\sqrt{3^9}\right)^{\frac{1}{2}}+\log_4(\log_5 25)=\frac{13}{2}$.

$\log_2 4^{\sqrt{2}} = \log_2 2^{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$; $\log_3\sqrt{3^9} = \log_3 3^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2}$, deci $\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $\log_4(\log_5 25) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$.

Expresia: $2\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}=6+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$.

Exercițiul 4 (partea întreagă)

Arătați că $[\log_2 20]+[\log_3 30]+[\log_4 40]=9$**.**

Rezolvare. Încadrăm fiecare număr între două puteri consecutive ale bazei; funcția logaritmică cu baza supraunitară păstrează sensul inegalităților.

$2^4<20<2^5 \Rightarrow 4<\log_2 20<5 \Rightarrow [\log_2 20]=4$;

$3^3<30<3^4 \Rightarrow 3<\log_3 30<4 \Rightarrow [\log_3 30]=3$;

$4^2<40<4^3 \Rightarrow 2<\log_4 40<3 \Rightarrow [\log_4 40]=2$.

Suma: $4+3+2=9$.

Exercițiul 5 (demonstrații)

Arătați că:

a) $\log_4 9+\log_8 125=\log_2 15$.

$\log_4 9=\log_{2^2}3^2=\log_2 3$ și $\log_8 125=\log_{2^3}5^3=\log_2 5$ (P7). Deci membrul stâng este $\log_2 3+\log_2 5=\log_2 15$. Egalitatea este adevărată.

b) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{125}=\log_2 5+\log_4 20-1$.

Membrul stâng: $\log_{2^{\frac{1}{2}}}5^{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\log_2 5=\frac{3}{2}\log_2 5$.

Membrul drept: $\log_4 20=\log_4 4+\log_4 5=1+\frac{1}{2}\log_2 5$, deci $\log_2 5+1+\frac{1}{2}\log_2 5-1=\frac{3}{2}\log_2 5$.

Membrii sunt egali.

c) $(\log_5 2)(\log_7 3)=(\log_5 3)(\log_7 2)$.

Trecem în baza e: membrul stâng $=\frac{\ln 2}{\ln 5}\cdot\frac{\ln 3}{\ln 7}$, iar membrul drept $=\frac{\ln 3}{\ln 5}\cdot\frac{\ln 2}{\ln 7}$. Cele două produse sunt egale.

d) $15^{\log_3 2}=2^{\log_3 5}+5^{\log_3 2}$.

Membrul stâng: $15^{\log_3 2}=3^{\log_3 2}\cdot 5^{\log_3 2}=2\cdot 5^{\log_3 2}$.

Membrul drept: din proprietatea din secțiunea 1, $2^{\log_3 5}=5^{\log_3 2}$, deci $2^{\log_3 5}+5^{\log_3 2}=2\cdot 5^{\log_3 2}$.

Egalitatea este adevărată.

e) $(\log_2 3)(\log_5 7)(\log_{11} 13)=(\log_2 13)(\log_5 3)(\log_{11} 7)$.

Trecem în baza e: membrul stâng $=\frac{\ln 3\cdot\ln 7\cdot\ln 13}{\ln 2\cdot\ln 5\cdot\ln 11}$, iar membrul drept $=\frac{\ln 13\cdot\ln 3\cdot\ln 7}{\ln 2\cdot\ln 5\cdot\ln 11}$. Cei doi membri sunt egali.

Exercițiul 6 (calcul literal)

Simplificați expresiile ($a,b,c>0$**, diferite de** 1**;** $m,n\neq 0$**):**

a) $\log_{\sqrt[n]{a}}\sqrt[m]{b}-\log_{a^m}b^n$.

$\log_{\sqrt[n]{a}}\sqrt[m]{b}=\log_{a^{\frac{1}{n}}}b^{\frac{1}{m}}=\dfrac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}}\log_a b=\dfrac{n}{m}\log_a b;\quad \log_{a^m}b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b.$

Diferența: $\dfrac{n}{m}\log_a b-\dfrac{n}{m}\log_a b=0.$

b) $\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_b c-\log_a c}-\log_{\frac{a}{b}}c,$ unde $a\neq b$ *(pentru ca baza* $\frac{a}{b}$ *să fie diferită de* 1*).*

Folosim P8 și P2: $\log_{\frac{a}{b}}c=\dfrac{1}{\log_c\frac{a}{b}}=\dfrac{1}{\log_c a-\log_c b}=\dfrac{1}{\frac{1}{\log_a c}-\frac{1}{\log_b c}}=\dfrac{\log_a c\cdot\log_b c}{\log_b c-\log_a c}.$

Deci expresia este egală cu 0.

Exercițiul 7

a) Arătați că valoarea expresiei $E=\dfrac{\log_5 x+\log_3 x}{\log_4 x+\log_3 x}$ **nu depinde de** x ($x>0$, $x\neq 1$).

Trecem în baza e:

$$E=\frac{\frac{\ln x}{\ln 5}+\frac{\ln x}{\ln 3}}{\frac{\ln x}{\ln 4}+\frac{\ln x}{\ln 3}}=\frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln 5}+\frac{1}{\ln 3}\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 3}\right)}=\frac{\frac{\ln 3+\ln 5}{\ln 3\cdot\ln 5}}{\frac{\ln 3+\ln 4}{\ln 3\cdot\ln 4}}=\frac{\ln 15\cdot\ln 4}{\ln 5\cdot\ln 12}=\log_5 15\cdot\log_{12}4,$$

am simplificat prin $\ln x\neq 0$ (deoarece $x\neq 1$). Rezultatul nu conține x.

b) Calculați $\dfrac{\log_{2x+1}4}{\log_{2x+1}8}$, pentru $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$.

Condițiile pentru bază: $2x+1>0$ *și* $2x+1\neq 1$.

Din formula de schimbare a bazei (citită de la dreapta la stânga): $\dfrac{\log_{2x+1}4}{\log_{2x+1}8}=\log_8 4=\log_{2^3}2^2=\dfrac{2}{3}.$

Bibliografie

[1] M. Burtea, G. Burtea, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Trunchi comun și curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2004.

[2] G. Constantinescu, C. Zîrna ș.a., *Pas cu pas prin matematică. Clasa a X-a*, Editura Crizon.