Lecția 2. Operații cu numere complexe sub formă algebrică

Adunarea și înmulțirea. Proprietăți. Puterile lui i

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub Licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

Știai că…

Bombelli nu avea încă litera i. El scria „più di meno” (plus din minus) pentru $+\sqrt{-1}$ și „meno di meno” pentru $-\sqrt{-1}$ și a stabilit reguli de înmulțire de felul „più di meno ori più di meno face meno” — adică $i \cdot i = -1$. Practic, regulile de calcul din această lecție au fost scrise acum peste 450 de ani, doar în altă „limbă”.

1. Reamintim

În Lecția 1 am văzut că orice număr complex se scrie în **forma algebrică**

$$z = a + bi, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1.$$

Partea reală, partea imaginară, egalitatea

- $a = \operatorname{Re} z$ este **partea reală**, iar $b = \operatorname{Im} z$ este **partea imaginară** a lui z (un număr *real*!).
- z este **real** $\iff \operatorname{Im} z = 0$; z este **pur imaginar** $\iff \operatorname{Re} z = 0$ și $\operatorname{Im} z \neq 0$.
- $a + bi = c + di \iff a = c$ și $b = d$ $\quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

Ideea lecției. Cu numerele complexe în forma algebrică se calculează exact ca în $\mathbb{R}$, tratând i ca pe o „literă”; singura regulă nouă este: oriunde apare i^2, îl înlocuim cu -1.

2. Adunarea numerelor complexe

Definiție

Pentru $z_1 = a + bi$ și $z_2 = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, **suma** lor este

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

Se adună separat părțile reale și separat părțile imaginare.

Teorema 1 (proprietățile adunării)

Pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

A1. **comutativitatea:** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

A2. **asociativitatea:** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

A3. **elementul neutru:** $z + 0 = 0 + z = z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$ (numărul $0 = 0 + 0i$ este element neutru);

A4. **elementul opus:** pentru orice $z = a + bi \in \mathbb{C}$ există $-z = -a - bi \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

Demonstrație. Fie $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$, $z_3 = e+fi$. Fiecare proprietate se reduce la proprietatea corespunzătoare a adunării numerelor reale, aplicată separat părților reale și părților imaginare.

A1. $z_1+z_2 = (a+c)+(b+d)i = (c+a)+(d+b)i = z_2+z_1$.

A2. $(z_1+z_2)+z_3 = \big[(a+c)+e\big]+\big[(b+d)+f\big]i = \big[a+(c+e)\big]+\big[b+(d+f)\big]i = z_1+(z_2+z_3)$.

A3. $z+0 = (a+0)+(b+0)i = a+bi = z$; din A1, și $0+z = z$.

A4. $z+(-z) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i = 0$; din A1, și $(-z)+z = 0$.

Scăderea. Pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ definim $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, adică

$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i.$$

3. Înmulțirea numerelor complexe

Definiție

Pentru $z_1 = a+bi$ și $z_2 = c+di$ ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$), **produsul** lor este

$$z_1 \cdot z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Practic, înmulțim termen cu termen și înlocuim i^2 cu -1: $(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bd\,i^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$.

În particular, pentru $k \in \mathbb{R}$: $k(a+bi) = ka+kbi$, și

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2+b^2.$$

Teorema 2 (proprietățile înmulțirii)

Pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:
I1. comutativitatea: $z_1z_2 = z_2z_1$;
I2. asociativitatea: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$;
I3. elementul neutru: $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$ (numărul $1 = 1+0i$ este element neutru);
I4. elementul invers: pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, există $z^{-1} \in \mathbb{C}$ astfel încât $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

Demonstrație. Fie $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$, $z_3 = e+fi$.

I1. $z_1z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$ și $z_2z_1 = (ca-db)+(cb+da)i$; părțile reale și părțile imaginare sunt egale, deoarece în $\mathbb{R}$ înmulțirea și adunarea sunt comutative.

I2. Prin calcul direct,

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) = (ace-adf-bcf-bde)+(acf+ade+bce-bdf)\,i.$$

I3. $(a+bi)(1+0i) = (a\cdot 1 - b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 1)i = a+bi$; din I1, și $1\cdot z = z$.

I4. Fie $z = a+bi \neq 0$; atunci $a^2+b^2 \neq 0$. Pornind de la $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$, împărțim prin numărul real nenul a^2+b^2 și obținem

$$(a+bi)\cdot\frac{a-bi}{a^2+b^2} = 1.$$

Inversul unui număr complex nenul

Inversul numărului complex $z = a + bi \neq 0$ este

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i.$$

Teorema 3 (distributivitatea)

Înmulțirea numerelor complexe este distributivă față de adunare: pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,

$$z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \qquad \text{și} \qquad (z_1+z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3.$$

Demonstrație. Cu notațiile de mai sus,

$$z_1(z_2+z_3) = (a+bi)\big[(c+e)+(d+f)i\big] = (ac+ae-bd-bf)+(ad+af+bc+be)i,$$

$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_1z_3 &= \big[(ac-bd)+(ad+bc)i\big] + \big[(ae-bf)+(af+be)i\big] \\ &= (ac+ae-bd-bf)+(ad+af+bc+be)i. \end{aligned}$$

A doua egalitate rezultă din prima și din comutativitatea înmulțirii.

Concluzie. Din Teoremele 1, 2 și 3 rezultă că $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ este un **corp comutativ**. Prin urmare, în $\mathbb{C}$ rămân valabile regulile de calcul din $\mathbb{R}$, inclusiv formulele de calcul prescurtat; de exemplu, $(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

4. Puterile lui i

Pentru $z \in \mathbb{C}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ definim $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ factori}}$, iar $z^0 = 1$ pentru $z \neq 0$. Pentru $z = i$ obținem:

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \qquad i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1.$$

Proprietatea 1

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă r este restul împărțirii lui n la 4, atunci

$$i^n = i^r, \qquad \text{adică} \qquad i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Demonstrație. Din teorema împărțirii cu rest, $n = 4k + r$, cu $k \in \mathbb{N}$ și $r \in \{0,1,2,3\}$. Atunci

$$i^n = i^{4k+r} = \left(i^4\right)^k \cdot i^r = 1^k \cdot i^r = i^r.$$

Proprietatea 2

Suma a patru puteri consecutive ale lui i este egală cu 0:

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0, \qquad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Dăm factor comun pe i^n:

$$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = i^n\left(1 + i + i^2 + i^3\right) = i^n(1+i-1-i) = i^n \cdot 0 = 0.$$

Atenție! Greșeli frecvente

- Partea imaginară a lui $z = 3 - 5i$ este -5, *nu* $-5i$.
- $(a+bi)^2 \neq a^2 + b^2 i^2$: nu uitați termenul $2abi$.
- Nu folosiți regula $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ pentru numere negative: $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} \neq \sqrt{36} = 6$. Corect: $2i \cdot 3i = 6i^2 = -6$.
- Inversul lui $a+bi$ *nu* este $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\,i$.
- Numărul 0 nu are invers.
- Între numerele complexe nereale nu există relația „$<$”: nu are sens să scriem $i > 0$.