Exercițiul rezolvat 10

Lecția 2. Operații cu numere complexe sub formă algebrică

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub Licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

Enunț

a) Să se rezolve sistemul de ecuații, dacă $x, y \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} x+y=3 \\ ix-y=-3+2i. \end{cases}$

b) Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul complex $z=2a-1+(a+1)\,i$ știind că $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)=2$.

c) Fie $m \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul complex $z=m^2+m+2i$ știind că $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$.

Rezolvare

a) Adunăm cele două ecuații: $x+ix=3+(-3+2i)$, adică $(1+i)x=2i$. Înmulțim cu $(1+i)^{-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$:

$$x=2i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=i-i^2=1+i.$$

Din prima ecuație, $y=3-x=3-(1+i)=2-i$. Deci $x=1+i,\ y=2-i$.

b) $\mathrm{Re}(z)=2a-1$ și $\mathrm{Im}(z)=a+1$ (numere reale, deoarece $a\in\mathbb{R}$). Din condiție:

$$(2a-1)(a+1)=2 \ \Rightarrow\ 2a^2+a-1=2 \ \Rightarrow\ 2a^2+a-3=0,$$

cu $\Delta=1+24=25$ și soluțiile $a=1$, $a=-\dfrac{3}{2}$.

Pentru $a=1$: $z=1+2i$; pentru $a=-\dfrac{3}{2}$: $z=-4-\dfrac{1}{2}i$. Deci $z\in\left\{1+2i,\ -4-\dfrac{1}{2}i\right\}$.

c) $\mathrm{Re}(z)=m^2+m$ și $\mathrm{Im}(z)=2$. Din condiție:

$$m^2+m+2=4 \ \Rightarrow\ m^2+m-2=0 \ \Rightarrow\ m\in\{1,-2\}.$$

Pentru $m=1$: $\mathrm{Re}(z)=2$; pentru $m=-2$: $\mathrm{Re}(z)=4-2=2$. În ambele cazuri $z=2+2i$.

Tema 10

1. Să se rezolve sistemul, dacă $x, y \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} x+y=2+i \\ x-iy=2-i. \end{cases}$

2. Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul complex $z=a-1+(a+2)\,i$ știind că $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)=4$.

3. Fie $m \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul complex $z=m^2-3m+(m-1)\,i$ știind că $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=-1$.

4. Să se rezolve sistemul, dacă $x, y \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} (1+i)x+y=1+i \\ x-y=2i. \end{cases}$