Exercițiul rezolvat 2

Lecția 2. Operații cu numere complexe sub formă algebrică

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub Licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

Enunț

a) Determinați numerele reale x și y pentru care $(2+i)x+(1-3i)y=4-5i$.
b) Calculați $(1+i)^2$ și apoi $(1+i)^{2026}$.
c) Determinați numărul complex z pentru care $(1+i)\cdot z=3-i$.

Rezolvare

a) Desfacem parantezele și grupăm partea reală și partea imaginară:

$$(2+i)x+(1-3i)y=2x+xi+y-3yi=(2x+y)+(x-3y)i.$$

Cum $x,y\in\mathbb{R}$, egalăm părțile reale și părțile imaginare:

$$\begin{cases}2x+y=4\\x-3y=-5\end{cases}\Rightarrow y=4-2x,\ \ x-12+6x=-5\ \Rightarrow\ x=1,\ y=2.$$

Deci $x=1,\ y=2$.

b) $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$. Cum $2026=2\cdot 1013$,

$$(1+i)^{2026}=\left[(1+i)^2\right]^{1013}=(2i)^{1013}=2^{1013}\cdot i^{1013}.$$

$1013=4\cdot 253+1$, deci $i^{1013}=i$ și $(1+i)^{2026}=2^{1013}\,i$.

c) Inversul lui $1+i$: $a=b=1$, $a^2+b^2=2$, deci $(1+i)^{-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$. Înmulțim egalitatea cu $(1+i)^{-1}$:

$$z=(1+i)^{-1}(3-i)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(3-i)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}i^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-2i=1-2i.$$

Tema 2

1. a) Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $(1+i)x+(2-i)y=5+2i$.
b) Calculați $(1-i)^2$ și $(1-i)^{2026}$.
c) Determinați $z\in\mathbb{C}$ pentru care $(1-i)\cdot z=3+i$.

2. a) Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $(3+i)x+(1-2i)y=5-3i$.
b) Calculați $(1+i)^2$ și $(1+i)^{2024}$.
c) Determinați $z\in\mathbb{C}$ pentru care $(2+i)\cdot z=1+3i$.

3. a) Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $(1-i)x+(2+3i)y=6-i$.
b) Calculați $(1-i)^2$ și $(1-i)^{2028}$.
c) Determinați $z\in\mathbb{C}$ pentru care $(1+2i)\cdot z=5+5i$.

4. a) Determinați $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $(2-i)x+(1+i)y=5-i$.
b) Calculați $(1+i)^2$ și $(1+i)^{2030}$.
c) Determinați $z\in\mathbb{C}$ pentru care $(3-i)\cdot z=5+5i$.