Exercițiul rezolvat 3

Lecția 2. Operații cu numere complexe sub formă algebrică

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub Licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

Enunț

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care numărul $z = (m+2i)(1+i)$ este: 1) real; 2) pur imaginar.
b) Arătați că numărul $E = (1+i)^{10} + (1-i)^{10}$ este real.
c) Determinați numerele complexe z pentru care $z^2 = -3+4i$.

Rezolvare

a) Aducem z la forma algebrică:

$$z = (m+2i)(1+i) = m+mi+2i+2i^2 = (m-2)+(m+2)\,i,$$

deci $\operatorname{Re} z = m-2$ și $\operatorname{Im} z = m+2$.

1) z este real $\iff \operatorname{Im} z = 0 \iff m+2=0 \iff m=-2$ (atunci $z=-4$).

2) z este pur imaginar $\iff \operatorname{Re} z = 0$ și $\operatorname{Im} z \neq 0$: $m-2=0 \Rightarrow m=2$, iar $\operatorname{Im} z = 4 \neq 0$. Deci $m=2$ (atunci $z=4i$).

b) Calculăm pătratele: $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ și $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$. Atunci

$$(1+i)^{10} = (2i)^5 = 32\,i^5 = 32\,i, \qquad (1-i)^{10} = (-2i)^5 = -32\,i^5 = -32\,i,$$

deci $E = 32i - 32i = 0$, care este un număr real.

c) Căutăm $z = a+bi$, cu $a,b \in \mathbb{R}$. Atunci $z^2 = a^2-b^2+2abi$, iar din $z^2 = -3+4i$ obținem

$$\begin{cases} a^2-b^2 = -3 \\ 2ab = 4. \end{cases}$$

Din a doua ecuație, $a \neq 0$ și $b = \dfrac{2}{a}$. Înlocuim în prima:

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \;\Rightarrow\; a^4+3a^2-4=0 \;\Rightarrow\; (a^2+4)(a^2-1)=0.$$

Cum $a \in \mathbb{R}$, $a^2+4>0$, deci $a^2=1$, adică $a=1$ (atunci $b=2$) sau $a=-1$ (atunci $b=-2$).

Deci $z \in \{1+2i,\ -1-2i\}$.

Tema 3

1. a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $z = (m+3i)(1-i)$ este: 1) real; 2) pur imaginar.
b) Arătați că numărul $E = (1+i)^8 + (1-i)^8$ este real.
c) Determinați numerele complexe z pentru care $z^2 = -5+12i$.

2. a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $z = (2+mi)(1+2i)$ este: 1) real; 2) pur imaginar.
b) Arătați că numărul $E = (1+i)^{12} + (1-i)^{12}$ este real.
c) Determinați numerele complexe z pentru care $z^2 = 8+6i$.

3. a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $z = (m-i)(2+i)$ este: 1) real; 2) pur imaginar.
b) Arătați că numărul $E = (1+i)^{14} + (1-i)^{14}$ este real.
c) Determinați numerele complexe z pentru care $z^2 = 2i$.

4. a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $z = (1+mi)(3-i)$ este: 1) real; 2) pur imaginar.
b) Arătați că numărul $E = (1+i)^{16} + (1-i)^{16}$ este real.
c) Determinați numerele complexe z pentru care $z^2 = -15+8i$.