Exercițiul rezolvat 4

Lecția 2. Operații cu numere complexe sub formă algebrică

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub Licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

Enunț

a) Arătați că numărul $z=1+2i$ verifică egalitatea $z^2-2z+5=0$.
b) Calculați produsul $P=i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{10}$.
c) Determinați numerele complexe z și w pentru care $z+w=3+i$ și $z-w=1+3i$.

Rezolvare

a) Calculăm separat fiecare termen:

$$z^2=(1+2i)^2=1+4i+4i^2=-3+4i, \qquad 2z=2+4i.$$

Atunci

$$z^2-2z+5=(-3+4i)-(2+4i)+5=(-3-2+5)+(4-4)i=0.$$

b) La înmulțirea puterilor cu aceeași bază se adună exponenții:

$$P=i^{1+2+3+\cdots+10}=i^{55}, \qquad \text{deoarece} \qquad 1+2+\cdots+10=\frac{10\cdot 11}{2}=55.$$

$55=4\cdot 13+3$, deci restul împărțirii la 4 este 3 și $P=i^3=-i$.

c) Adunăm cele două egalități:

$$2z=(3+i)+(1+3i)=4+4i \;\Rightarrow\; z=2+2i.$$

Din prima egalitate, $w=(3+i)-z=(3+i)-(2+2i)=1-i$.

Tema 4

1. a) Arătați că numărul $z=2+i$ verifică egalitatea $z^2-4z+5=0$.
b) Calculați produsul $P=i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^8$.
c) Determinați $z,w\in\mathbb{C}$ pentru care $z+w=4+2i$ și $z-w=2-4i$.

2. a) Arătați că numărul $z=3-i$ verifică egalitatea $z^2-6z+10=0$.
b) Calculați produsul $P=i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{12}$.
c) Determinați $z,w\in\mathbb{C}$ pentru care $z+w=5$ și $z-w=1+2i$.

3. a) Arătați că numărul $z=-1+3i$ verifică egalitatea $z^2+2z+10=0$.
b) Calculați produsul $P=i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{14}$.
c) Determinați $z,w\in\mathbb{C}$ pentru care $z+w=1+5i$ și $z-w=-3+i$.

4. a) Arătați că numărul $z=2-3i$ verifică egalitatea $z^2-4z+13=0$.
b) Calculați produsul $P=i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{13}$.
c) Determinați $z,w\in\mathbb{C}$ pentru care $z+w=6-2i$ și $z-w=-2-4i$.