Exercițiul rezolvat 8

Lecția 2. Operații cu numere complexe sub formă algebrică

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub Licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

Enunț

Să se calculeze și să se scrie sub formă algebrică:

a) $(1+i)(1-i)^{-1}$; b) $-6i(1+3i)^{-1}$; c) $\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-1}$.

Rezolvare

Calculăm întâi inversul cu formula $\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}\,i$, apoi efectuăm înmulțirea.

a) Pentru $1-i$: $a^2+b^2=2$, deci $(1-i)^{-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\,i$. Atunci

$$(1+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i+\frac{1}{2}\,i+\frac{1}{2}\,i^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+i=i.$$

b) Pentru $1+3i$: $a^2+b^2=10$, deci $(1+3i)^{-1}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}\,i$. Atunci

$$-6i\left(\frac{1}{10}-\frac{3}{10}\,i\right)=-\frac{6}{10}\,i+\frac{18}{10}\,i^2=-\frac{9}{5}-\frac{3}{5}\,i.$$

c) Pentru $1+i\sqrt{3}$: $a^2+b^2=1+3=4$, deci $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-1}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,i=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Atunci

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{1-2\sqrt{3}\,i+3i^2}{4}=\frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Tema 8

Să se calculeze și să se scrie sub formă algebrică:

1. a) $(2+i)(1-i)^{-1}$; b) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i\right)^{-1}$.

2. a) $(1+3i)(1+i)^{-1}$; b) $(2-i)(3+i)^{-1}$.

3. a) $(1+i)(2-i)^{-1}$; b) $(3+4i)(1-2i)^{-1}$.

4. a) $5i(2+i)^{-1}$; b) $(1-i)^2(1+i)^{-1}$.