Exercițiul rezolvat 9

Lecția 2. Operații cu numere complexe sub formă algebrică

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub Licența Creative Commons Atribuire – Necomercial – Fără Derivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

Enunț

Să se calculeze:
a) i^{529}, $(-i)^{4523}$, i^{-257};
b) $1-i+i^2-i^3+\cdots+(-1)^{2025}\,i^{2025}$;
c) $1+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots+\dfrac{1}{i^{2006}}$.

Rezolvare

a) $529=4\cdot 132+1$, deci $i^{529}=i^1=i$.
$(-i)^{4523}=(-1)^{4523}\cdot i^{4523}=-i^{4523}$; cum $4523=4\cdot 1130+3$, $i^{4523}=i^3=-i$, deci $(-i)^{4523}=i$.
$i^{-257}=\left(i^{257}\right)^{-1}$; cum $257=4\cdot 64+1$, $i^{257}=i$, iar inversul lui i ($a=0, b=1$) este $-i$. Deci $i^{-257}=-i$.
b) Termenul general este $(-1)^k i^k=(-i)^k$, deci suma este $S=1+(-i)+(-i)^2+\cdots+(-i)^{2025}$. Puterile lui $-i$ sunt

$$(-i)^0=1,\quad (-i)^1=-i,\quad (-i)^2=-1,\quad (-i)^3=i,\quad (-i)^4=1,\ \ldots$$

deci se repetă din patru în patru, iar suma a patru puteri consecutive este 0. Suma are 2026 de termeni; $2026=4\cdot 506+2$, deci rămân ultimii doi termeni:

$$S=(-i)^{2024}+(-i)^{2025}=1+(-i)=1-i.$$

c) Cum $\dfrac{1}{i}=i^{-1}=-i$, avem $\dfrac{1}{i^k}=\left(\dfrac{1}{i}\right)^k=(-i)^k$. Deci

$$S=1+(-i)+(-i)^2+\cdots+(-i)^{2006}.$$

Suma are 2007 termeni; $2007=4\cdot 501+3$, deci rămân ultimii trei termeni:

$$S=(-i)^{2004}+(-i)^{2005}+(-i)^{2006}=1-i-1=-i.$$

Tema 9

Să se calculeze:
1. i^{1000}, i^{1004}, i^{4005}, i^{5423}, $(-i)^{334}$.
2. a) $i+i^2+i^3+\cdots+i^{1000}$; b) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{1000}$.
3. $\dfrac{1}{i^{25}}-\dfrac{1}{i^{54}}-\dfrac{1}{(-i)^{16}}+\dfrac{1}{i^{75}}+\dfrac{2}{(-i)^{102}}$.
4. a) $1+i+i^2+\cdots+i^{2027}$; b) $i\cdot i^2\cdot\ldots\cdot i^{100}$; c) $1+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\cdots+\dfrac{1}{i^{100}}$.