Prof. Micu Elena

Lecția 4. Conjugatul unui număr complex

Numere complexe · Clasa a X-a

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire-Necomercial-FărăDerivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. De la un exemplu la definiție

Fie numerele complexe $z_1 = 3 + 4\mathrm{i}$ și $z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$. Ele au aceeași parte reală, iar părțile imaginare sunt numere opuse:

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = 3, \qquad \mathrm{Im}(z_1) = 4 = -\,\mathrm{Im}(z_2).$$

Calculăm suma și produsul lor:

$$z_1 + z_2 = (3 + 4\mathrm{i}) + (3 - 4\mathrm{i}) = 6 \in \mathbb{R}, \qquad z_1 \cdot z_2 = (3 + 4\mathrm{i})(3 - 4\mathrm{i}) = 9 - 16\mathrm{i}^2 = 25 \in \mathbb{R}.$$

Deși niciunul dintre cele două numere nu este real, atât suma, cât și produsul lor sunt numere reale. Perechile de numere de acest fel apar foarte des în calcule și poartă un nume special: **numere complexe conjugate**.

Definiție

Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = a + b\mathrm{i}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. Numărul complex

$$\overline{z} = a - b\mathrm{i}$$

se numește **conjugatul** numărului z. Pe scurt: $\overline{a + b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}$.
Numerele z și $\overline{z}$ se numesc **numere complexe conjugate**.

Conjugatul se obține deci păstrând partea reală și schimbând semnul părții imaginare: $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ și $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\,\mathrm{Im}(z)$.

Exemple

z	$5 + 2\mathrm{i}$	$-1 - 6\mathrm{i}$	$7\mathrm{i}$	-4	$\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{2}$
$\overline{z}$	$5 - 2\mathrm{i}$	$-1 + 6\mathrm{i}$	$-7\mathrm{i}$	-4	$\sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{2}$

Atenție

- Semnul se schimbă numai la partea imaginară, nu și la partea reală: $\overline{-2 + 3\mathrm{i}} = -2 - 3\mathrm{i}$ (nu $2 - 3\mathrm{i}$, acesta este opusul lui $-2 + 3\mathrm{i}$).
- Înainte de a scrie conjugatul, numărul se aduce la forma algebrică $a + b\mathrm{i}$: de exemplu, $\overline{4\mathrm{i} - 9} = \overline{-9 + 4\mathrm{i}} = -9 - 4\mathrm{i}$.

2. Proprietățile numerelor complexe conjugate

Teoremă (proprietăți ale numerelor complexe conjugate)

1. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$: $\quad z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R} \quad$ și $\quad z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z) \in \mathbb{R}$.

2. $z \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\overline{z} = z$.

3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad$ și $\quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}, \quad$ oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

4. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad$ și $\quad \overline{z^n} = (\overline{z})^n, \quad$ oricare ar fi $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad$ oricare ar fi $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}^*$.

Demonstrație. Fie $z = a + b\mathrm{i}$, $z_1 = a + b\mathrm{i}$, $z_2 = c + d\mathrm{i}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. $z + \overline{z} = (a + b\mathrm{i}) + (a - b\mathrm{i}) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
$z \cdot \overline{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 - b^2\mathrm{i}^2 = a^2 + b^2 = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)$.

2. $\overline{z} = z \iff a - b\mathrm{i} = a + b\mathrm{i} \iff -b = b \iff b = 0 \iff z = a \in \mathbb{R}$.

3. $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}$, deci $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)\mathrm{i} = (a - b\mathrm{i}) + (c - d\mathrm{i}) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
La fel, $\overline{z_1 - z_2} = (a - c) - (b - d)\mathrm{i} = (a - b\mathrm{i}) - (c - d\mathrm{i}) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

4. $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$, deci $\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i}$. Pe de altă parte,

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) = ac - ad\mathrm{i} - bc\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 = (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i}.$$

Cele două rezultate coincid, deci $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. Aplicând această egalitate de mai multe ori pentru $z_1 = z_2 = \cdots = z$, obținem $\overline{z^n} = \overline{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z} = \overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \ldots \cdot \overline{z} = (\overline{z})^n$.

5. Notăm $w = \dfrac{z_1}{z_2}$, adică $z_1 = w \cdot z_2$. Din proprietatea 4, $\overline{z_1} = \overline{w} \cdot \overline{z_2}$. Cum $z_2 \neq 0$, avem și $\overline{z_2} \neq 0$, deci $\overline{w} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. ■

Reținem

Conjugatul „trece" peste operații: conjugatul unei sume, diferențe, al unui produs, al unui cât sau al unei puteri se obține conjugând fiecare număr în parte și păstrând operațiile.

3. Completări utile

Alte proprietăți

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z = a + b\mathrm{i}$:

a) $\overline{\overline{z}} = z \quad$ (conjugatul conjugatului este numărul inițial);

b) $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z)$;

c) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \quad$ și $\quad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$;

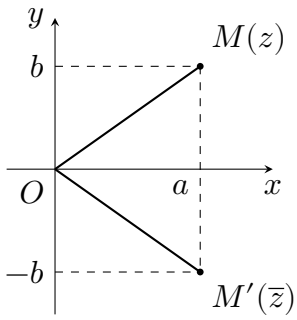
d) z are partea reală egală cu 0 (adică $z = b\mathrm{i}$, $b \in \mathbb{R}$) dacă și numai dacă $\overline{z} = -z$;

e) $\overline{\alpha z} = \alpha\,\overline{z}$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. a) $\overline{\overline{z}} = \overline{a - b\mathrm{i}} = a + b\mathrm{i} = z$. b) $z - \overline{z} = (a + b\mathrm{i}) - (a - b\mathrm{i}) = 2b\mathrm{i}$. c) Rezultă din $z + \overline{z} = 2a$ și $z - \overline{z} = 2b\mathrm{i}$. d) $\overline{z} = -z \iff a - b\mathrm{i} = -a - b\mathrm{i} \iff a = 0$. e) Din proprietatea 4 și din $\overline{\alpha} = \alpha$. ■

Interpretare geometrică

Dacă numărului $z = a + b\mathrm{i}$ îi asociem în plan punctul $M(a, b)$, atunci conjugatului $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$ îi corespunde punctul $M'(a, -b)$.
Punctele M și M' sunt **simetrice față de axa** Ox (axa reală).
În particular, $\overline{z} = z$ exact atunci când punctul M se află pe axa Ox, adică atunci când z este număr real (proprietatea 2).



4. Împărțirea numerelor complexe cu ajutorul conjugatului

Faptul că $z \cdot \overline{z}$ este număr real oferă o cale simplă de a scrie sub formă algebrică un cât de numere complexe: **se amplifică fracția cu conjugatul numitorului**. Numitorul devine astfel număr real.

Regulă de calcul

Pentru $z_1 = a + b\mathrm{i}$ și $z_2 = c + d\mathrm{i} \neq 0$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{(a + b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})}{(c + d\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\mathrm{i}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,\mathbf{i}.$$

Formula nu trebuie memorată; este suficient să reținem procedeul.

Exemplu

$$\frac{4 + 7\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} = \frac{(4 + 7\mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}{(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})} = \frac{8 + 4\mathrm{i} + 14\mathrm{i} + 7\mathrm{i}^2}{2^2 - \mathrm{i}^2} = \frac{1 + 18\mathrm{i}}{5} = \frac{1}{5} + \frac{18}{5}\,\mathbf{i}.$$

Atenție

Procedeul seamănă cu raționalizarea numitorului de la radicali: acolo amplificam cu expresia conjugată pentru a elimina radicalul de la numitor, aici amplificăm cu numărul conjugat pentru a elimina pe i de la numitor.

5. Exerciții rezolvate

Exercițiul 1

Să se determine conjugatul numărului $z = (2 - 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})$.
Metoda 1. Aducem numărul la forma algebrică: $z = 2 + 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = 5 - \mathrm{i}$, deci $\overline{z} = 5 + \mathbf{i}$.
Metoda 2. Folosim proprietatea 4: $\overline{z} = \overline{2 - 3\mathrm{i}} \cdot \overline{1 + \mathrm{i}} = (2 + 3\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 2 - 2\mathrm{i} + 3\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = 5 + \mathbf{i}$.

Exercițiul 2

Să se scrie sub formă algebrică numărul $z = \dfrac{3 + 2\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$.
Amplificăm cu $1 + 2\mathrm{i}$, conjugatul numitorului:

$$z = \frac{(3 + 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})}{(1 - 2\mathrm{i})(1 + 2\mathrm{i})} = \frac{3 + 6\mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2}{1 - 4\mathrm{i}^2} = \frac{-1 + 8\mathrm{i}}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{8}{5}\,\mathbf{i}.$$

Exercițiul 3

Să se arate că numărul $w = \dfrac{2+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} + \dfrac{2-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$ este real și să se calculeze w.

Notăm $u = \dfrac{2+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$. Din proprietatea 5, $\overline{u} = \dfrac{\overline{2+\mathrm{i}}}{\overline{3-4\mathrm{i}}} = \dfrac{2-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$, adică al doilea termen al sumei este chiar $\overline{u}$. Atunci $w = u + \overline{u} = 2\,\mathrm{Re}(u) \in \mathbb{R}$.

Calculăm $u = \dfrac{(2+\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \dfrac{6+8\mathrm{i}+3\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{9+16} = \dfrac{2+11\mathrm{i}}{25}$, deci $\mathrm{Re}(u) = \dfrac{2}{25}$ și $w = \dfrac{4}{25}$.

Exercițiul 4

Să se determine $z \in \mathbb{C}$ pentru care $z + 2\overline{z} = 6 - 3\mathrm{i}$.

Fie $z = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$ și ecuația devine

$$(a + b\mathrm{i}) + 2(a - b\mathrm{i}) = 6 - 3\mathrm{i} \iff 3a - b\mathrm{i} = 6 - 3\mathrm{i}.$$

Egalând părțile reale și părțile imaginare: $3a = 6$ și $-b = -3$, deci $a = 2$, $b = 3$ și $z = 2 + 3\mathrm{i}$.

Verificare: $(2 + 3\mathrm{i}) + 2(2 - 3\mathrm{i}) = 6 - 3\mathrm{i}$.

Exercițiul 5

Să se calculeze $\overline{(1+\mathrm{i})^{10}}$.

Din proprietatea 4, $\overline{(1+\mathrm{i})^{10}} = \left(\overline{1+\mathrm{i}}\right)^{10} = (1-\mathrm{i})^{10}$. Cum $(1-\mathrm{i})^2 = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = -2\mathrm{i}$, obținem

$$(1-\mathrm{i})^{10} = \left[(1-\mathrm{i})^2\right]^5 = (-2\mathrm{i})^5 = -32\,\mathrm{i}^5 = -32\,\mathrm{i}.$$

Exercițiul 6

Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ dacă $\overline{x - 2\mathrm{i}} + 3y\mathrm{i} = 5 + y\mathrm{i}$.

Cum $x \in \mathbb{R}$, avem $\overline{x - 2\mathrm{i}} = x + 2\mathrm{i}$. Egalitatea devine

$$x + 2\mathrm{i} + 3y\mathrm{i} = 5 + y\mathrm{i} \iff x + (2 + 3y)\mathrm{i} = 5 + y\mathrm{i}.$$

Egalând părțile reale și părțile imaginare: $x = 5$ și $2 + 3y = y$, deci $x = 5$, $y = -1$.

Exercițiul 7

Să se determine $z \in \mathbb{C}$ pentru care $2\overline{z} - \mathrm{i}z = 4 + \mathrm{i}$.

Fie $z = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$ și

$$2(a - b\mathrm{i}) - \mathrm{i}(a + b\mathrm{i}) = 2a - 2b\mathrm{i} - a\mathrm{i} - b\mathrm{i}^2 = (2a + b) + (-a - 2b)\mathrm{i}.$$

Din $(2a + b) + (-a - 2b)\mathrm{i} = 4 + \mathrm{i}$ rezultă sistemul $2a + b = 4$, $-a - 2b = 1$. Din a doua ecuație, $a = -1 - 2b$; înlocuind în prima, $-2 - 4b + b = 4$, deci $b = -2$ și $a = 3$. Așadar $z = 3 - 2\mathrm{i}$.

Verificare: $2(3 + 2\mathrm{i}) - \mathrm{i}(3 - 2\mathrm{i}) = 6 + 4\mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = 4 + \mathrm{i}$.

Exercițiul 8

Să se calculeze $\overline{\left(\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\right)}$.

Din proprietatea 5, conjugăm numărătorul și numitorul, apoi amplificăm cu conjugatul noului

numitor:

$$\overline{\left(\frac{1+2\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\right)} = \frac{1-2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \frac{(1-2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})} = \frac{3-\mathrm{i}-6\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{9-\mathrm{i}^2} = \frac{1-7\mathrm{i}}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}\,\mathbf{i}.$$

Exercițiul 9

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care numărul $z = \dfrac{a+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ este real.
Scriem z sub formă algebrică:

$$z = \frac{(a+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{a-a\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{2} = \frac{a+2}{2} + \frac{2-a}{2}\,\mathrm{i}.$$

Numărul z este real dacă și numai dacă $\mathrm{Im}(z) = 0$, adică $\dfrac{2-a}{2} = 0$, deci $a = 2$ (și atunci $z = 2$).

Exercițiul 10

Să se determine $z \in \mathbb{C}$ dacă $z \cdot \overline{z} - 2z = 12 - 6\mathrm{i}$.
Fie $z = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Știm că $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ (proprietatea 1), deci

$$a^2 + b^2 - 2(a + b\mathrm{i}) = 12 - 6\mathrm{i} \iff (a^2 + b^2 - 2a) - 2b\mathrm{i} = 12 - 6\mathrm{i}.$$

Egalând părțile imaginare: $-2b = -6$, deci $b = 3$. Egalând părțile reale: $a^2 + 9 - 2a = 12$, adică $a^2 - 2a - 3 = 0$, cu soluțiile $a = 3$ și $a = -1$. Așadar $z = 3 + 3\mathbf{i}$ sau $z = -1 + 3\mathbf{i}$.

Exercițiul 11

Fără a efectua ridicările la putere, să se arate că numărul $w = (1+2\mathrm{i})^5 + (1-2\mathrm{i})^5$ este real.
Notăm $u = (1+2\mathrm{i})^5$. Din proprietatea 4, $\overline{u} = \left(\overline{1+2\mathrm{i}}\right)^5 = (1-2\mathrm{i})^5$, adică al doilea termen este conjugatul primului. Atunci, din proprietatea 1, $w = u + \overline{u} = 2\,\mathrm{Re}(u) \in \mathbb{R}$.

6. Exerciții propuse

1. Să se determine conjugatele numerelor:
a) $4 - 7\mathrm{i}$; b) $-3\mathrm{i}$; c) $-5 + 2\mathrm{i}$; d) $(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$; e) $\mathrm{i}\,(2-\mathrm{i})$.

2. Să se scrie sub formă algebrică:
a) $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$; b) $\dfrac{5-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$; c) $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}} + \dfrac{2-3\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}}$.

3. Să se determine $z \in \mathbb{C}$ dacă: a) $2z - \overline{z} = 3 + 12\mathrm{i}$; b) $3\overline{z} + \mathrm{i}z = 5 + 7\mathrm{i}$.

4. Fără a efectua ridicările la putere, să se arate că numărul $(3+2\mathrm{i})^8 + (3-2\mathrm{i})^8$ este real.

5. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ dacă $\overline{x+3\mathrm{i}} + 2y\mathrm{i} = 4 - y\mathrm{i}$.

6. Să se calculeze: a) $\overline{(1-\mathrm{i})^6}$; b) $\overline{\left(\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}\right)}$.

7. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care numărul $z = \dfrac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ este real.

8. Să se determine $z \in \mathbb{C}$ dacă $z \cdot \overline{z} + 2z = 12 + 4\mathrm{i}$.

Răspunsuri la exercițiile propuse. 1. a) $4+7\mathrm{i}$; b) $3\mathrm{i}$; c) $-5-2\mathrm{i}$; d) $5-5\mathrm{i}$; e) $1-2\mathrm{i}$. **2.** a) $1+\mathrm{i}$; b) $3+2\mathrm{i}$; c) $\dfrac{10}{17}$. **3.** a) $z=3+4\mathrm{i}$; b) $z=1-2\mathrm{i}$. **4.** Al doilea termen este conjugatul primului, deci suma este $2\,\mathrm{Re}\big[(3+2\mathrm{i})^8\big]\in\mathbb{R}$. **5.** $x=4$, $y=1$. **6.** a) $-8\mathrm{i}$; b) $-\dfrac{1}{10}-\dfrac{7}{10}\,\mathrm{i}$. **7.** $a=-\dfrac{1}{2}$. **8.** $z=2+2\mathrm{i}$ sau $z=-4+2\mathrm{i}$.

Bibliografie. Burtea, Marius; Burtea, Georgeta, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Trunchi comun + curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2004 — paragraful 2.3 „Numere complexe conjugate”, pag. 47–48.