Prof. Micu Elena

Lecția 5. Modulul unui număr complex

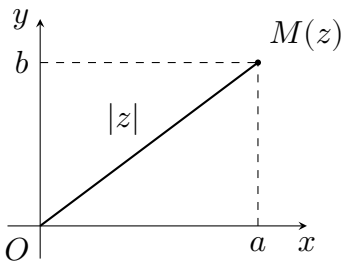
Numere complexe · Clasa a X-a

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire-Necomercial-FărăDerivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0).

1. De la un exemplu la definiție

Pentru un număr real x, modulul $|x|$ arată cât de departe este x de 0 pe axa numerelor. Ne propunem să măsurăm în același fel „mărimea” unui număr complex.
Numărului $z = 4 + 3\mathrm{i}$ îi asociem în plan punctul $M(4,3)$. Distanța de la origine la M se află cu teorema lui Pitagora:



$$OM = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Această distanță se numește **modulul** numărului z și se notează $|z|$. Așadar $|4 + 3\mathrm{i}| = 5$.

Definiție

Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = a + b\mathrm{i}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$. **Modulul** numărului complex z este numărul real pozitiv sau nul

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Exemple

a) $|5 - 12\mathrm{i}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$; b) $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;
c) $|-3\mathrm{i}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$; d) $|-7| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$; e) $\left|-2 + \mathrm{i}\sqrt{5}\right| = \sqrt{4 + 5} = 3$.

Atenție

- Sub radical apar **pătratele numerelor reale** a și b, fără i: $|3 - 4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, nu $\sqrt{3^2 + (-4\mathrm{i})^2}$.
- Modulul nu este suma $a + b$ și nici $|a| + |b|$: $|3 + 4\mathrm{i}| = 5$, nu 7.
- Dacă z este număr real ($b = 0$), atunci $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, adică regăsim modulul cunoscut al unui număr real.

2. Proprietățile modulului

Teoremă (proprietăți ale modulului)

Pentru orice $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ și $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $|z| \geq 0$;

2. $|z| = 0 \iff z = 0$;

3. $|\overline{z}| = |z|$;

4. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

6. $|z^n| = |z|^n$;

7. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$;

8. $|z| = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$;

9. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Demonstrație. Fie $z = a + b\text{i}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Radicalul unui număr real pozitiv sau nul este pozitiv sau nul.

2. $|z| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0$ și $b = 0 \iff z = 0$.

3. $|\overline{z}| = |a - b\text{i}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

4. $z \cdot \overline{z} = (a + b\text{i})(a - b\text{i}) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

5. Folosim proprietatea 4 și faptul că $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \cdot \overline{z_1 z_2} = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2.$$

Cum modulele sunt numere pozitive sau nule, rezultă $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

6. Se aplică proprietatea 5 de mai multe ori: $|z^n| = |z \cdot z \cdot \ldots \cdot z| = |z| \cdot |z| \cdot \ldots \cdot |z| = |z|^n$.

7. Din $z_1 = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot z_2$ și proprietatea 5 obținem $|z_1| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2|$; împărțim la $|z_2| \neq 0$.

8. $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z \cdot \overline{z} = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

9. Observăm mai întâi că, pentru orice $w = x + y\text{i} \in \mathbb{C}$, avem $\text{Re}(w) \leq |w|$, deoarece $x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Apoi, din proprietatea 4,

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \left(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2\right).$$

Numerele $z_1 \overline{z_2}$ și $\overline{z_1} z_2$ sunt conjugate, deci suma lor este $2\,\text{Re}(z_1 \overline{z_2}) \leq 2\,|z_1 \overline{z_2}| = 2|z_1| \cdot |z_2|$. Rezultă

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = \left(|z_1| + |z_2|\right)^2,$$

de unde $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. ■

Atenție

Modulul „trece” peste înmulțire, împărțire și ridicare la putere, dar **nu** și peste adunare sau scădere: în general $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$. De exemplu, pentru $z_1 = 1$ și $z_2 = \text{i}$ avem $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$, iar $|z_1| + |z_2| = 2$.

3. Completări utile

Alte proprietăți

Pentru orice $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

a) $|-z| = |z|$ și $|\alpha z| = |\alpha| \cdot |z|$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ și $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;

c) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, pentru $z \neq 0$ (inversul se exprimă prin conjugat și modul);

d) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Interpretare geometrică

- $|z|$ este distanța de la origine la punctul M asociat numărului z.
- Dacă numerelor z_1 și z_2 le corespund punctele M_1 și M_2, atunci $|z_1 - z_2| = M_1M_2$ **(distanța dintre cele două puncte)**. Într-adevăr, pentru $z_1 = a + b\mathrm{i}$ și $z_2 = c + d\mathrm{i}$ avem $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.
- Proprietatea 9 se numește **inegalitatea triunghiului**: într-un triunghi, o latură este mai mică decât suma celorlalte două. Egalitatea $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ are loc numai când $z_1 = 0$ sau $z_2 = t \cdot z_1$ cu $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

4. Exerciții rezolvate

Exercițiul 1

Să se calculeze modulele numerelor: a) $z = -6 + 8\mathrm{i}$; b) $z = 2 - \mathrm{i}\sqrt{5}$.

a) $|z| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. b) $|z| = \sqrt{2^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Exercițiul 2

Folosind proprietățile modulului, să se calculeze: a) $|(3+4\mathrm{i})(1-\mathrm{i})|$; b) $\left|\dfrac{1+7\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\right|$; c) $\left|(1+\mathrm{i})^8\right|$.

Nu este nevoie să efectuăm înmulțirea, împărțirea sau ridicarea la putere:

a) $|(3+4\mathrm{i})(1-\mathrm{i})| = |3+4\mathrm{i}| \cdot |1-\mathrm{i}| = 5 \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$;

b) $\left|\dfrac{1+7\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|1+7\mathrm{i}|}{|3-4\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{50}}{5} = \dfrac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$;

c) $\left|(1+\mathrm{i})^8\right| = |1+\mathrm{i}|^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 = 16$.

Exercițiul 3

Se dau numerele $z_1 = 2 - \mathrm{i}$ și $z_2 = -1 + 3\mathrm{i}$. Să se calculeze: a) $|z_1 + z_2|$; b) $|2z_1 - z_2|$.

Modulul unei sume nu se calculează termen cu termen; mai întâi efectuăm operațiile.

a) $z_1 + z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, deci $|z_1 + z_2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

b) $2z_1 - z_2 = (4 - 2\mathrm{i}) - (-1 + 3\mathrm{i}) = 5 - 5\mathrm{i}$, deci $|2z_1 - z_2| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$.

Observație: $|z_1| + |z_2| = \sqrt{5} + \sqrt{10}$, iar $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$, în acord cu inegalitatea triunghiului.

Exercițiul 4

Să se determine $z \in \mathbb{C}$ pentru care $|z| = z + 1 - 3\mathrm{i}$.
Fie $z = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ecuația devine $\sqrt{a^2+b^2} = (a+1) + (b-3)\mathrm{i}$. Membrul stâng este număr real, deci partea imaginară a membrului drept este 0: $b - 3 = 0$, adică $b = 3$.
Rămâne $\sqrt{a^2+9} = a + 1$, cu condiția $a + 1 \geq 0$. Ridicând la pătrat: $a^2 + 9 = a^2 + 2a + 1$, deci $a = 4$ (verifică $a + 1 \geq 0$). Așadar $z = 4 + 3\mathbf{i}$.
Verificare: $|4 + 3\mathrm{i}| = 5$ și $(4 + 3\mathrm{i}) + 1 - 3\mathrm{i} = 5$.

Exercițiul 5

Să se determine $z \in \mathbb{C}$ pentru care $z + |z| = 8 - 4\mathrm{i}$.
Fie $z = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right) + b\mathrm{i} = 8 - 4\mathrm{i}$. Egalând părțile imaginare, $b = -4$.
Egalând părțile reale: $a + \sqrt{a^2+16} = 8$, adică $\sqrt{a^2+16} = 8 - a$, cu condiția $8 - a \geq 0$.
Ridicând la pătrat: $a^2 + 16 = 64 - 16a + a^2$, deci $16a = 48$ și $a = 3$. Așadar $z = 3 - 4\mathbf{i}$.
Verificare: $(3 - 4\mathrm{i}) + |3 - 4\mathrm{i}| = 3 - 4\mathrm{i} + 5 = 8 - 4\mathrm{i}$.

Exercițiul 6

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care numărul $z = (a-1) + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ are modulul egal cu 4.
$|z| = 4 \iff \sqrt{(a-1)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4 \iff (a-1)^2 + 12 = 16 \iff (a-1)^2 = 4$.
Rezultă $a - 1 = 2$ sau $a - 1 = -2$, deci $a = 3$ sau $a = -1$.

Exercițiul 7

Să se arate că numărul $z = \dfrac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ are modulul 1 și să se determine $\dfrac{1}{z}$ fără calcule.
Din proprietatea 7, $|z| = \dfrac{|2+\mathrm{i}|}{|2-\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$ (numărătorul și numitorul sunt numere conjugate, deci au același modul).
Cum $|z| = 1$, din proprietatea 8 rezultă $\dfrac{1}{z} = \overline{z} = \dfrac{\overline{2+\mathrm{i}}}{\overline{2-\mathrm{i}}} = \dfrac{2-\mathbf{i}}{2+\mathbf{i}}$.

Exercițiul 8

Fie $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$. Să se arate că $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4$.
Folosim proprietatea 4, $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$:

$$|z+1|^2 = (z+1)(\overline{z}+1) = z\overline{z} + z + \overline{z} + 1, \qquad |z-1|^2 = (z-1)(\overline{z}-1) = z\overline{z} - z - \overline{z} + 1.$$

Adunând, obținem $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 2z\overline{z} + 2 = 2|z|^2 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$.

Exercițiul 9

Să se calculeze distanța dintre punctele din plan asociate numerelor $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ și $z_2 = 4 - 2\mathrm{i}$.
Distanța este $|z_1 - z_2| = |(1-4) + (2+2)\mathrm{i}| = |-3 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{9+16} = 5$.

5. Exerciții propuse

1. Să se calculeze modulele numerelor: a) $8-6\mathrm{i}$; b) $-5\mathrm{i}$; c) $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; d) $\sqrt{7}-3\mathrm{i}$.

2. Folosind proprietățile modulului, să se calculeze:

a) $|(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})|$; b) $\left|\dfrac{4+3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right|$; c) $\left|(1-\mathrm{i})^6\right|$; d) $\left|\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^4\right|$.

3. Se dau numerele $z_1=3+\mathrm{i}$ și $z_2=1-2\mathrm{i}$. Să se calculeze:
a) $|z_1+z_2|$; b) $|z_1-z_2|$; c) $|2z_1+3z_2|$; d) $|z_1\cdot\overline{z_2}|$.

4. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ dacă: a) $|z|=z+2+4\mathrm{i}$; b) $z+|z|=9+3\mathrm{i}$.

5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care numărul $z=a+(a+1)\mathrm{i}$ are modulul egal cu 5.

6. Să se arate că numărul $z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$ are modulul 1 și să se determine $\dfrac{1}{z}$ fără calcule.

7. Fie $z\in\mathbb{C}$ cu $|z|=2$. Să se arate că $|z+2|^2+|z-2|^2=16$.

8. Să se calculeze distanța dintre punctele din plan asociate numerelor $z_1=-2+\mathrm{i}$ și $z_2=3+13\mathrm{i}$.

Răspunsuri la exercițiile propuse. **1.** a) 10; b) 5; c) 2; d) 4. **2.** a) $5\sqrt{2}$; b) $\sqrt{5}$; c) 8; d) 16. **3.** a) $\sqrt{17}$; b) $\sqrt{13}$; c) $\sqrt{97}$; d) $5\sqrt{2}$. **4.** a) $z=3-4\mathrm{i}$; b) $z=4+3\mathrm{i}$. **5.** $a=3$ sau $a=-4$. **6.** $|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=1$; $\dfrac{1}{z}=\overline{z}=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$. **7.** Suma este $2|z|^2+8=16$. **8.** $|z_1-z_2|=|-5-12\mathrm{i}|=13$.

Bibliografie. Burtea, Marius; Burtea, Georgeta, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Trunchi comun + curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2004 — paragraful 2.4 „Modulul unui număr complex”, pag. 48–49.