Prof. Micu Elena

Numere complexe conjugate. Modulul unui număr complex

Exerciții din manual (pag. 49–51): indicații, rezultate parțiale și rezultate finale

Clasa a X-a

Material didactic. Sursa: mateexamene.ro

Acest material este pus la dispoziție sub licența Creative Commons Atribuire-Necomercial-FărăDerivate 4.0 Internațional (CC BY-NC-ND 4.0). Enunțurile exercițiilor aparțin manualului indicat la bibliografie; indicațiile și rezultatele sunt redactate de autoare.

Exersare

E1. Să se determine conjugatele numerelor:
a) $3-5\mathrm{i}$; b) $-4\mathrm{i}$; c) $-2-8\mathrm{i}$; d) $-6\mathrm{i}-4$; e) $(-1-2\mathrm{i})\left(\overline{1+\mathrm{i}}\right)$; f) $\overline{-2\mathrm{i}}\cdot(-\mathrm{i}-1)$; g) $\left(\sqrt{2}-\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\right)$.

Indicație. Pentru $z=a+b\mathrm{i}$, conjugatul este $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$: se păstrează partea reală și se schimbă semnul părții imaginare. La d) se scrie întâi numărul sub forma $a+b\mathrm{i}$. La e), f), g) se aduce mai întâi numărul la forma algebrică.

Rezultate parțiale. d) $-6\mathrm{i}-4=-4-6\mathrm{i}$; e) $(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2=-3-\mathrm{i}$; f) $\overline{-2\mathrm{i}}=2\mathrm{i}$ și $2\mathrm{i}(-\mathrm{i}-1)=-2\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}=2-2\mathrm{i}$; g) $2-\mathrm{i}^2=3$.

Rezultate finale. a) $3+5\mathrm{i}$; b) $4\mathrm{i}$; c) $-2+8\mathrm{i}$; d) $-4+6\mathrm{i}$; e) $-3+\mathrm{i}$; f) $2+2\mathrm{i}$; g) 3.

E2. Să se scrie sub formă algebrică:
a) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3+5\mathrm{i}}+\dfrac{2-\mathrm{i}}{3-5\mathrm{i}}$; b) $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}+\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\cdot\dfrac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$; d) $\dfrac{6-5\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}-\dfrac{4-3\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}$.

Indicație. Fiecare fracție se amplifică cu conjugatul numitorului. La a), b), c) al doilea termen este conjugatul primului, deci suma este $u+\overline{u}=2\,\mathrm{Re}(u)$: este suficient să calculăm primul termen. La d): $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$, $(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$ și $\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$.

Rezultate parțiale. a) $\dfrac{(2+\mathrm{i})(3-5\mathrm{i})}{9+25}=\dfrac{11-7\mathrm{i}}{34}$; b) $\dfrac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2}{1+3}=\dfrac{-2+2\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}$; c) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$ și $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{5}$, deci primul termen este $\dfrac{-4-3\mathrm{i}}{5}$; d) $\dfrac{6-5\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}+\dfrac{4-3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{10-8\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=(5-4\mathrm{i})(-\mathrm{i})$.

Rezultate finale. a) $\dfrac{11}{17}$; b) -1; c) $-\dfrac{8}{5}$; d) $-4-5\mathrm{i}$.

E3. Să se determine numerele $x,y\in\mathbb{R}$, dacă:
a) $\overline{3x-4\mathrm{i}}+6x-2y=2\left(\overline{4\mathrm{i}-x+7}\right)-\overline{3y\mathrm{i}}$; b) $\overline{2x-3+(x^2-y-\mathrm{i})\,\mathrm{i}}=3x^2-y+\overline{x\mathrm{i}-8}$.

Indicație. Se calculează fiecare conjugat (numerele x, y sunt reale), se aduc ambii membri la forma algebrică și se egalează părțile reale, respectiv părțile imaginare. La b) se desface mai întâi paranteza: $(x^2-y-\mathrm{i})\,\mathrm{i}=(x^2-y)\,\mathrm{i}+1$.

Rezultate parțiale. a) $3x+4\mathrm{i}+6x-2y=2(7-x-4\mathrm{i})+3y\mathrm{i}$, adică $(9x-2y)+4\mathrm{i}=(14-2x)+(3y-8)\mathrm{i}$; rezultă $9x-2y=14-2x$ și $3y-8=4$;
b) membrul stâng: $\overline{(2x-2)+(x^2-y)\,\mathrm{i}}=(2x-2)-(x^2-y)\,\mathrm{i}$; membrul drept: $(3x^2-y-8)-x\mathrm{i}$;

rezultă $2x-2=3x^2-y-8$ și $x^2-y=x$. Din a doua ecuație $y=x^2-x$; înlocuind în prima: $2x^2-x-6=0$.

Rezultate finale. a) $x=2, y=4$; b) $(x,y)=(2,2)$ sau $(x,y)=\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.

E4. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ dacă:
a) $\overline{z}=\mathrm{i}$; b) $\overline{z}-2z=-2+9\mathrm{i}$; c) $2\overline{z}+\mathrm{i}z=\overline{1+\mathrm{i}}$; d) $3\overline{z}=6+3\mathrm{i}-\overline{2\overline{z}}$; e) $\mathrm{i}\overline{z}+\left(\overline{1-\mathrm{i}}\right)\cdot z=\overline{3+2\mathrm{i}}+4\mathrm{i}$.

Indicație. Se notează $z=a+b\mathrm{i}$, $a,b\in\mathbb{R}$, deci $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$. Se aduce ecuația la forma algebrică și se egalează părțile reale, respectiv părțile imaginare. La a) se conjugă ambii membri: $z=\overline{\mathrm{i}}$. La d): $\overline{2\overline{z}}=2z$.

Rezultate parțiale. b) $(a-b\mathrm{i})-2(a+b\mathrm{i})=-a-3b\mathrm{i}$, deci $-a=-2$ și $-3b=9$;
c) $(2a-b)+(a-2b)\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$, deci $2a-b=1$ și $a-2b=-1$;
d) $3\overline{z}+2z=6+3\mathrm{i}$, adică $5a-b\mathrm{i}=6+3\mathrm{i}$;
e) $\mathrm{i}(a-b\mathrm{i})+(1+\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})=a+(2a+b)\mathrm{i}$ și membrul drept este $3-2\mathrm{i}+4\mathrm{i}=3+2\mathrm{i}$; deci $a=3$ și $2a+b=2$.

Rezultate finale. a) $z=-\mathrm{i}$; b) $z=2-3\mathrm{i}$; c) $z=1+\mathrm{i}$; d) $z=\frac{6}{5}-3\mathrm{i}$; e) $z=3-4\mathrm{i}$.

E5. Se dau numerele $z_1=1-\mathrm{i}$, $z_2=-3-\mathrm{i}$, $z_3=3-4\mathrm{i}$. Să se determine:
a) $|z_k|$, $k=1,2,3$; b) $|z_1+z_2+(-z_3)|$; c) $|\overline{z_2+z_3-z_1}|$; d) $|3z_1-2z_2+z_3|$; e) $|z_1\cdot z_2|+|z_1\cdot z_2\cdot z_3|$; f) $\left|z_1^6\cdot z_2^4\cdot z_3\right|$; g) $\left|\frac{z_1^8 z_3^4}{z_2^6}\right|$.

Indicație. $|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$. La b), c), d) se efectuează mai întâi operațiile din interiorul modulului (modulul unei sume nu este suma modulelor); la c) se folosește $|\overline{z}|=|z|$. La e), f), g) se folosesc proprietățile $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $|z^n|=|z|^n$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ și rezultatele de la a).

Rezultate parțiale. b) $z_1+z_2-z_3=-5+2\mathrm{i}$; c) $z_2+z_3-z_1=-1-4\mathrm{i}$; d) $3z_1-2z_2+z_3=12-5\mathrm{i}$; e) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot 5=2\sqrt{5}+10\sqrt{5}$; f) $\left(\sqrt{2}\right)^6\cdot\left(\sqrt{10}\right)^4\cdot 5=8\cdot 100\cdot 5$; g) $\frac{\left(\sqrt{2}\right)^8\cdot 5^4}{\left(\sqrt{10}\right)^6}=\frac{16\cdot 625}{1000}$.

Rezultate finale. a) $|z_1|=\sqrt{2}$, $|z_2|=\sqrt{10}$, $|z_3|=5$; b) $\sqrt{29}$; c) $\sqrt{17}$; d) 13; e) $12\sqrt{5}$; f) 4000; g) 10.

Observație. În secțiunea „Indicații și răspunsuri” a manualului apare $|z_1|=2$; valoarea corectă este $|z_1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

E6. Să se determine modulele numerelor:
a) $\frac{3-\mathrm{i}}{-2+\mathrm{i}}$; b) $\frac{2+\sqrt{5}\,\mathrm{i}}{2-\sqrt{5}\,\mathrm{i}}$; c) $\left(\frac{2+\mathrm{i}\sqrt{12}}{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^4$; d) $\left(\sqrt{4-3\sqrt{2}}-\mathrm{i}\sqrt{4+3\sqrt{2}}\right)^6$.

Indicație. Nu se efectuează împărțirile sau ridicările la putere; se folosesc $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ și $|z^n|=|z|^n$. La b) numărătorul și numitorul sunt numere conjugate, deci au același modul.

Rezultate parțiale. a) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{\sqrt{4+5}}{\sqrt{4+5}}$; c) $\left(\frac{\sqrt{4+12}}{\sqrt{1+3}}\right)^4=\left(\frac{4}{2}\right)^4$; d) pentru numărul din paranteză, $a^2+b^2=\left(4-3\sqrt{2}\right)+\left(4+3\sqrt{2}\right)=8$, deci modulul lui este $\sqrt{8}$, iar rezultatul este $\left(\sqrt{8}\right)^6=8^3$.

Rezultate finale. a) $\sqrt{2}$; b) 1; c) 16; d) 512.

Observație. La d), în forma tipărită, $4-3\sqrt{2}<0$, deci $\sqrt{4-3\sqrt{2}}$ nu este număr real. Calculul de mai sus, făcut formal, conduce la răspunsul din manual (512). Enunțul are sens, cu același rezultat, dacă se citește de exemplu $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ și $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

E7. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ astfel încât: a) $|z|=z+3+\mathrm{i}$; b) $2z+7=|z^2|+4\mathrm{i}$; c) $z^2=|z|$.

Indicație. Se notează $z=a+b\mathrm{i}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Modulul este număr real, deci se egalează părțile reale și părțile imaginare. La b): $|z^2|=|z|^2=a^2+b^2$. La c): $z^2=(a^2-b^2)+2ab\mathrm{i}$. La ecuațiile cu radical se pune condiția ca membrul fără radical să fie pozitiv sau nul.

Rezultate parțiale. a) $\sqrt{a^2+b^2}=(a+3)+(b+1)\mathrm{i}$, deci $b=-1$ și $\sqrt{a^2+1}=a+3$; prin ridicare la pătrat, $6a+8=0$;
b) $(2a+7)+2b\mathrm{i}=(a^2+b^2)+4\mathrm{i}$, deci $b=2$ și $a^2-2a-3=0$;
c) $2ab=0$ și $a^2-b^2=\sqrt{a^2+b^2}$. Dacă $b=0$: $a^2=|a|$, deci $a\in\{0,1,-1\}$. Dacă $a=0$: $-b^2=|b|$, deci $b=0$.

Rezultate finale. a) $z=-\dfrac{4}{3}-\mathrm{i}$; b) $z=3+2\mathrm{i}$ sau $z=-1+2\mathrm{i}$; c) $z\in\{0,\,1,\,-1\}$.

E8. Se dau numerele complexe $z_1=4-(3-a)\mathrm{i}$ și $z_2=(1+2b)+4\sqrt{2}\,\mathrm{i}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $|z_1|=4$ și $|z_2|=1+2|z_1|$.

Indicație. Se scriu modulele cu formula $\sqrt{a^2+b^2}$ și se ridică la pătrat. A doua condiție devine $|z_2|=1+2\cdot 4=9$.

Rezultate parțiale. $16+(3-a)^2=16$, deci $(3-a)^2=0$; $(1+2b)^2+32=81$, deci $(1+2b)^2=49$, adică $1+2b=7$ sau $1+2b=-7$.

Rezultate finale. $a=3$; $b=3$ sau $b=-4$.

Aprofundare

A1. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ știind că: a) $z^2=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$; b) $z^2=\dfrac{-2+4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$; c) $\overline{z}=z^2$.

Indicație. La a) și b) se scrie mai întâi membrul drept sub formă algebrică. Apoi se notează $z=a+b\mathrm{i}$, cu $z^2=(a^2-b^2)+2ab\mathrm{i}$, și se egalează părțile reale și părțile imaginare.

Rezultate parțiale. a) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$; sistemul: $a^2-b^2=0$, $2ab=-1$; rezultă $b=-a$ și $a^2=\dfrac{1}{2}$;
b) $\dfrac{(-2+4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5}=2\mathrm{i}$; sistemul: $a^2-b^2=0$, $2ab=2$; rezultă $b=a$ și $a^2=1$;
c) $a-b\mathrm{i}=(a^2-b^2)+2ab\mathrm{i}$, deci $a=a^2-b^2$ și $-b=2ab$, adică $b(2a+1)=0$. Dacă $b=0$: $a=a^2$. Dacă $a=-\dfrac{1}{2}$: $b^2=\dfrac{3}{4}$.

Rezultate finale. a) $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ sau $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$; b) $z=1+\mathrm{i}$ sau $z=-1-\mathrm{i}$; c) $z\in\left\{0,\ 1,\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

A2. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ din egalitățile: a) $\dfrac{z}{1+z}+\overline{\left(\dfrac{z}{1+z}\right)}=1$; b) $\dfrac{2+\mathrm{i}-z}{1-z}\in\mathbb{R}$; c) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{2\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}-z}\right)=1$.

Indicație. a) $u+\overline{u}=2\,\mathrm{Re}(u)$, deci condiția este $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z}{1+z}\right)=\dfrac{1}{2}$; se scrie $\dfrac{z}{1+z}=1-\dfrac{1}{1+z}$.
b) $\dfrac{2+\mathrm{i}-z}{1-z}=1+\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-z}$, deci trebuie ca $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-z}$ să fie real. c) $\dfrac{2\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}-z}=1+\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-z}$, deci trebuie ca

$\operatorname{Re}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-z}\right)=0$. În toate cazurile se notează $z=a+b\mathrm{i}$ și se amplifică cu conjugatul numitorului.

Rezultate parțiale. a) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1+z}\right)=\dfrac{1+a}{(1+a)^2+b^2}=\dfrac{1}{2}$, de unde $(1+a)^2+b^2=2(1+a)$, adică $a^2+b^2=1$; condiție: $z\neq -1$;
b) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-z}=\dfrac{(1+\mathrm{i})\,[(1-a)+b\mathrm{i}]}{(1-a)^2+b^2}$, cu partea imaginară $\dfrac{1-a+b}{(1-a)^2+b^2}=0$; condiție: $z\neq 1$;
c) $\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}-z}=\dfrac{\mathrm{i}\,[-a-(1-b)\mathrm{i}]}{a^2+(1-b)^2}=\dfrac{(1-b)-a\mathrm{i}}{a^2+(1-b)^2}$, deci $1-b=0$; condiție: $z\neq \mathrm{i}$.

Rezultate finale. a) toate numerele z cu $|z|=1$, $z\neq -1$; b) $z=(b+1)+b\mathrm{i}$, $b\in\mathbb{R}^*$ (adică $a=b+1$, $z\neq 1$); c) $z=a+\mathrm{i}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

A3. Să se arate că $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n\in\mathbb{R}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

Indicație. Un număr complex w este real dacă și numai dacă $\overline{w}=w$. Se folosesc $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ și $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$.

Rezultate parțiale. Fie $w=(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$. Atunci $\overline{w}=\left(\overline{1+\mathrm{i}}\right)^n+\left(\overline{1-\mathrm{i}}\right)^n=(1-\mathrm{i})^n+(1+\mathrm{i})^n=w$.

Rezultate finale. $\overline{w}=w$, deci $w\in\mathbb{R}$. (Altfel: cei doi termeni sunt conjugați, deci $w=2\operatorname{Re}\left[(1+\mathrm{i})^n\right]$.)

A4. Dacă $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, atunci $z+\dfrac{1}{z}\in\mathbb{R}\iff |z|=1$.

Indicație. Se folosește $w\in\mathbb{R}\iff w=\overline{w}$, pentru $w=z+\dfrac{1}{z}$, și apoi $z\cdot\overline{z}=|z|^2$. Ipoteza $z\notin\mathbb{R}$ înseamnă $z\neq\overline{z}$.

Rezultate parțiale. $z+\dfrac{1}{z}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}\iff z-\overline{z}=\dfrac{1}{\overline{z}}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{z-\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}\iff (z-\overline{z})\left(1-\dfrac{1}{|z|^2}\right)=0.$

Rezultate finale. Cum $z-\overline{z}\neq 0$, egalitatea are loc dacă și numai dacă $|z|^2=1$, adică $|z|=1$.

A5. Fie $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=1$. Să se arate că: a) $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$, $(1+z_1\cdot z_2\neq 0)$;
b) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)=0$, $(z_1\neq z_2)$.

Indicație. Din $|z|=1$ rezultă $z\cdot\overline{z}=1$, deci $\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$ și $\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}$. La a) se arată că numărul este egal cu conjugatul său. La b) se arată că $\overline{v}=-v$; atunci $2\operatorname{Re}(v)=v+\overline{v}=0$.

Rezultate parțiale. a) $\overline{\left(\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{1+\dfrac{1}{z_1z_2}}=\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2+1}$;

b) $\overline{\left(\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}}{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_2}}=\dfrac{z_2+z_1}{z_2-z_1}=-\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$.

Rezultate finale. a) numărul coincide cu conjugatul său, deci este real; b) $\overline{v}=-v$, deci $\operatorname{Re}(v)=0$.

A6. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cu modulul egal cu 1. Dacă $z_1 z_2 z_3 \neq -1$, să se arate că

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{1+z_1z_2z_3}\right)=0.$$

Indicație. $\operatorname{Im}(w)=0 \iff w\in\mathbb{R} \iff \overline{w}=w$. Ca la A5, $\overline{z_k}=\dfrac{1}{z_k}$, $k=1,2,3$. Se calculează $\overline{w}$ și se amplifică fracția obținută cu $z_1z_2z_3$.
Rezultate parțiale. Numărătorul lui $\overline{w}$:

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_1z_3}+\frac{1}{z_2z_3}=\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2+z_3+z_2+z_1}{z_1z_2z_3};$$

numitorul lui $\overline{w}$: $1+\dfrac{1}{z_1z_2z_3}=\dfrac{z_1z_2z_3+1}{z_1z_2z_3}$.
Rezultate finale. Prin împărțire se obține $\overline{w}=w$, deci $w\in\mathbb{R}$ și $\operatorname{Im}(w)=0$.

A7. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ pentru care $|z|=|z-1|=\left|z^{-1}\right|$.

Indicație. $\left|z^{-1}\right|=\dfrac{1}{|z|}$, deci din $|z|=\dfrac{1}{|z|}$ rezultă $|z|=1$. Apoi se notează $z=a+b\mathrm{i}$ și se scriu condițiile $|z|=1$, $|z-1|=1$.

Rezultate parțiale. $a^2+b^2=1$ și $(a-1)^2+b^2=1$; scăzând, $-2a+1=0$, deci $a=\dfrac{1}{2}$ și $b^2=\dfrac{3}{4}$.

Rezultate finale. $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ sau $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

A8. Să se determine $z\in\mathbb{C}$ care verifică simultan condițiile: $\left|\dfrac{z\mathrm{i}+1}{z-5}\right|=\dfrac{3}{2}$ și $\left|\dfrac{z-4}{2-z}\right|=1$.

Indicație. Se folosește $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ și se notează $z=a+b\mathrm{i}$. Se începe cu a doua condiție, $|z-4|=|2-z|$, care dă direct pe a. În prima condiție, $z\mathrm{i}+1=(1-b)+a\mathrm{i}$.
Rezultate parțiale. $(a-4)^2+b^2=(2-a)^2+b^2$, deci $a=3$. Prima condiție: $2\,|z\mathrm{i}+1|=3\,|z-5|$, adică $4\left[(1-b)^2+9\right]=9\left[4+b^2\right]$, de unde $5b^2+8b-4=0$.
Rezultate finale. $z=3-2\mathrm{i}$ sau $z=3+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.

A9. Pentru $z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}$ să se arate că:
a) $\left|1-z_1\cdot\overline{z_2}\right|^2-|z_1-z_2|^2=\left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)$;
b) $|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_1+z_2+z_3|^2$.
Indicație. Se folosește $|w|^2=w\cdot\overline{w}$ pentru fiecare modul la pătrat, apoi se desfac parantezele.
Rezultate parțiale. a) $(1-z_1\overline{z_2})(1-\overline{z_1}z_2)-(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=1-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+|z_1|^2|z_2|^2-|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2-|z_2|^2$;
b) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$ și analoagele; notând cu S suma celor trei paranteze de tipul $z_j\overline{z_k}+\overline{z_j}z_k$, membrul stâng este $2\left(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2\right)+S$, iar $|z_1+z_2+z_3|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+S$.
Rezultate finale. a) rămâne $1-|z_1|^2-|z_2|^2+|z_1|^2|z_2|^2=\left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right)$; b) ambii membri sunt egali cu $2\left(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2\right)+S$.

A10. Să se arate că pentru $z \in \mathbb{C}$:
a) $|z+1+3\mathrm{i}|^2+6\ \mathrm{Im}\,(\overline{z}) = |z|^2+2\,\mathrm{Re}(z)+10$; b) $|z|^2 = 2\,\mathrm{Re}^2(z) - \mathrm{Re}\,(z^2)$; c) $|z-\mathrm{i}|^2-|z+2\mathrm{i}|^2+3 = 2\,\mathrm{Re}(3\mathrm{i}z)$.

Indicație. Se verifică prin calcul direct, luând $z = a+b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$: se calculează separat fiecare membru.

Rezultate parțiale. a) $\mathrm{Im}\,(\overline{z}) = -b$; membrul stâng: $(a+1)^2+(b+3)^2-6b = a^2+b^2+2a+10$;
b) $z^2 = (a^2-b^2)+2ab\mathrm{i}$; membrul drept: $2a^2-(a^2-b^2) = a^2+b^2$;
c) membrul stâng: $a^2+(b-1)^2-a^2-(b+2)^2+3 = -6b$; $3\mathrm{i}z = -3b+3a\mathrm{i}$, deci membrul drept este $2\cdot(-3b) = -6b$.

Rezultate finale. În fiecare caz cei doi membri sunt egali: a) cu $a^2+b^2+2a+10$; b) cu a^2+b^2; c) cu $-6b$.

A11. Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \dfrac{1}{3}$, atunci $\left|\left(\sqrt{2}-1\right)z^3 - \mathrm{i}z\right| < \dfrac{3}{4}$.

Indicație. Se aplică inegalitatea triunghiului, $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$, apoi $\left|z^3\right| = |z|^3$ și $|\mathrm{i}| = 1$.

Rezultate parțiale. $\left|\left(\sqrt{2}-1\right)z^3 - \mathrm{i}z\right| \le \left(\sqrt{2}-1\right)|z|^3+|z| < \left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{27}$ (deoarece $\sqrt{2}-1<1$).

Rezultate finale. $\dfrac{10}{27} < \dfrac{3}{4}$, deci inegalitatea este adevărată.

A12. Dacă $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \dfrac{1}{2}$, să se arate că $\left|(1+\mathrm{i})\cdot z^3 + \mathrm{i}z\right| < \dfrac{3}{4}$.

Indicație. Ca la A11: inegalitatea triunghiului, cu $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$ și $|\mathrm{i}| = 1$.

Rezultate parțiale. $\left|(1+\mathrm{i})z^3+\mathrm{i}z\right| \le \sqrt{2}\,|z|^3+|z| < \dfrac{\sqrt{2}}{8}+\dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{8}+\dfrac{1}{2}$ (deoarece $\sqrt{2}<2$).

Rezultate finale. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$, deci inegalitatea este adevărată.

A13. Să se determine numărul complex $z = x+2\mathrm{i}$, $x \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că $|z-3-4\mathrm{i}|$ este minim.

Indicație. Se calculează modulul în funcție de x; un radical este minim când expresia de sub radical este minimă.

Rezultate parțiale. $z-3-4\mathrm{i} = (x-3)-2\mathrm{i}$, deci $|z-3-4\mathrm{i}| = \sqrt{(x-3)^2+4} \ge \sqrt{4} = 2$, cu egalitate pentru $x = 3$.

Rezultate finale. $x = 3$, deci $z = 3+2\mathrm{i}$; valoarea minimă a modulului este 2.

Bibliografie

- Burtea, Marius; Burtea, Georgeta, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Trunchi comun + curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2004 — paragrafele 2.3 „Numere complexe conjugate” și 2.4 „Modulul unui număr complex”, exercițiile E1–E8 și A1–A13, pag. 49–51; secțiunea „Indicații și răspunsuri”.