Prof. Micu Elena

Lecția 10
Șiruri convergente la zero
Analiză matematică – clasa a XI-a

Material didactic.

În Lecțiile 8 și 9 am studiat șirurile cu limita $+\infty$ și $-\infty$. Acum ne ocupăm de un caz particular foarte important al șirurilor convergente: șirurile care au limita 0. Vom vedea că orice șir convergent se reduce la un șir convergent la zero, iar proprietățile de mai jos vor fi folosite permanent în calculul limitelor.

1. Șiruri convergente la zero

Definiție (caz particular al teoremei cu ε)

Șirul $(x_n)_{n\geq n_0}$ este **convergent la zero** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \geq n_0$ astfel încât

$$|x_n| < \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon.$$

Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ sau $x_n \to 0$.

Legătura cu orice șir convergent

Fie $l \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \iff \lim_{n\to\infty} (x_n - l) = 0.$$

Justificare. Ambele afirmații înseamnă același lucru: pentru orice $\varepsilon > 0$ există n_ε astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$, $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$.

Consecință. $x_n \to l$ dacă și numai dacă x_n se scrie $x_n = l + y_n$, cu $y_n \to 0$. De aceea studiul șirurilor convergente se reduce la studiul șirurilor convergente la zero.

P1. Inversul unui șir crescător nemărginit

Dacă șirul $(x_n)_{n\geq n_0}$ are termenii strict pozitivi, este strict crescător și nemărginit, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Șirul este nemărginit (și pozitiv), deci există un rang n_ε cu $x_{n_\varepsilon} > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Șirul este strict crescător, deci pentru $n \geq n_\varepsilon$:

$$x_n \geq x_{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_n} < \varepsilon \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{x_n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Deci $\dfrac{1}{x_n} \to 0$. □

Exemple. Șirurile din Lecția 8, n, n^α ($\alpha > 0$), a^n ($a > 1$), $n!$, au termenii pozitivi (pentru $n \geq 1$),

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

sunt strict crescătoare (șirul $n!$ de la rangul 1) și nemărginite. Prin urmare

$$\frac{1}{n}\to 0,\qquad \frac{1}{n^\alpha}\to 0\ (\alpha>0),\qquad \frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n\to 0\ (a>1),\qquad \frac{1}{n!}\to 0.$$

În particular, $\dfrac{1}{n^2}\to 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\to 0$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\to 0$.

P2. Operații cu șiruri convergente la zero

Dacă $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ și $\alpha\in\mathbb{R}$, atunci:

1) $x_n+y_n\to 0$ (suma a două șiruri convergente la zero converge la zero);

2) $\alpha x_n\to 0$ (o constantă ori un șir convergent la zero converge la zero);

3) $x_n y_n\to 0$ (produsul a două șiruri convergente la zero converge la zero).

Demonstrație 1). Fie $\varepsilon>0$. Aplicăm definiția pentru $\frac{\varepsilon}{2}$: există n'_ε cu $|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)\,n\ge n'_\varepsilon$, și n''_ε cu $|y_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)\,n\ge n''_\varepsilon$. Luăm $n_\varepsilon=\max(n'_\varepsilon,n''_\varepsilon)$. Pentru $n\ge n_\varepsilon$, folosind inegalitatea modulului $|a+b|\le|a|+|b|$,

$$|x_n+y_n|\le|x_n|+|y_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Demonstrație 2). Dacă $\alpha=0$, șirul $\alpha x_n=0$ este constant. Dacă $\alpha\neq 0$, aplicăm definiția pentru $\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$: pentru $n\ge n_\varepsilon$, $|x_n|<\frac{\varepsilon}{|\alpha|}$, deci

$$|\alpha x_n|=|\alpha|\cdot|x_n|<|\alpha|\cdot\frac{\varepsilon}{|\alpha|}=\varepsilon.$$

Demonstrația 3) rezultă din P3, deoarece un șir convergent este mărginit. □

Observații. a) Proprietățile 1) și 3) se extind la un număr **finit** de șiruri. b) Reciprocele sunt false: $x_n=1$, $y_n=-1$ au $x_n+y_n\to 0$; $x_n=1$, $y_n=\frac{1}{n}$ au $x_n y_n\to 0$.

P3. Produsul dintre un șir mărginit și un șir convergent la zero

Dacă (x_n) este mărginit și $y_n\to 0$, atunci $x_n y_n\to 0$.

Demonstrație. Șirul (x_n) este mărginit: există $M>0$ cu $|x_n|\le M$, $(\forall)\,n\ge n_0$. Fie $\varepsilon>0$. Din $y_n\to 0$, pentru $\frac{\varepsilon}{M}$ există n_ε cu $|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$, $(\forall)\,n\ge n_\varepsilon$. Atunci

$$|x_n y_n|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,\quad (\forall)\,n\ge n_\varepsilon.$$

Deci $x_n y_n\to 0$. □

Șiruri mărginite uzuale: $\sin a_n$, $\cos a_n\in[-1,1]$; $(-1)^n\in\{-1,1\}$; $\operatorname{arctg} a_n\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{arcctg} a_n\in(0,\pi)$.

P4. Șirul modulelor

$$x_n\to 0\iff |x_n|\to 0.$$

Justificare. $|x_n-0|=\big||x_n|-0\big|$, deci condițiile din definiție coincid.

Observație. Dacă $x_n\to l$, atunci $|x_n|\to|l|$ (din $\big||x_n|-|l|\big|\le|x_n-l|$). Reciproca este falsă pentru $l\neq 0$: $x_n=(-1)^n$ are $|x_n|=1\to 1$, dar nu are limită.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

P5. Inversul unui șir convergent la zero

1) Dacă $x_n \to 0$ și $x_n > 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$, atunci $\dfrac{1}{x_n} \to +\infty$.

2) Dacă $x_n \to 0$ și $x_n < 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$, atunci $\dfrac{1}{x_n} \to -\infty$.

Demonstrație 1). Fie $\varepsilon > 0$. Aplicăm definiția convergenței la zero pentru numărul pozitiv $\frac{1}{\varepsilon}$: există n_ε cu $|x_n| < \frac{1}{\varepsilon}$, $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$. Cum $x_n > 0$,

$$0 < x_n < \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_n} > \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon.$$

Analog pentru 2). □

Șirul putere a^n – tabel recapitulativ

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & a \in (-1,1), \\ \text{nu există}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Justificare. $a > 1$: Lecția 8. $a = 1$: șir constant. $a \in (0,1)$: P1, cu $\frac{1}{a} > 1$. $a = 0$: șir constant (de la rangul 1). $a \in (-1,0)$: $|a^n| = |a|^n \to 0$, apoi P4. $a = -1$: $1, -1, 1, \ldots$ nu are limită. $a < -1$: $a^{2k} = (a^2)^k \to +\infty$, iar $a^{2k+1} = a \cdot (a^2)^k \to -\infty$; două subșiruri cu limite diferite.

Atenție

1) În P1, toate cele trei condiții sunt necesare (termeni pozitivi, strict crescător, nemărginit). De exemplu, $x_n = n$ verifică toate; $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ este strict crescător, dar mărginit, iar $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{2} \neq 0$.

2) În P5, semnul termenilor contează: $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, dar $\frac{1}{x_n} = (-1)^n n$ nu are limită.

2. Exerciții rezolvate

Exemplul 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n + n} = 0$**, cu P1**

Fie $x_n = 3^n + n$, $n \geq 0$. Termenii sunt pozitivi. Șirul este strict crescător:

$$x_{n+1} - x_n = 3^{n+1} + n + 1 - 3^n - n = 2 \cdot 3^n + 1 > 0.$$

Șirul este nemărginit, deoarece $x_n \geq n$ și n nu este majorat. Conform P1, $\dfrac{1}{x_n} \to 0$.

Exemplul 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{2}{5} \right)^n \right) = 0$

$\dfrac{1}{n} \to 0$ (P1) și $\left(\dfrac{2}{5} \right)^n \to 0$ (deoarece $\frac{2}{5} \in (0,1)$). Conform P2, 1), suma lor tinde la 0.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n^2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$

$\dfrac{3}{n^2} \to 0$ (P1 și P2, 2)) și $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \to 0$. Conform P2, 3), produsul tinde la 0.

Exemplul 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(3n+1)}{n^2} = 0$

Scriem $x_n = \cos(3n+1)\cdot\dfrac{1}{n^2}$. Șirul $\cos(3n+1)$ este mărginit, deoarece $-1 \le \cos(3n+1) \le 1$, iar $\dfrac{1}{n^2} \to 0$. Conform P3, produsul tinde la 0.

Exemplul 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n+1)}{5^n} = 0$

Scriem $x_n = \operatorname{arctg}(n+1)\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$. Șirul $\operatorname{arctg}(n+1) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este mărginit, iar $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n \to 0$. Conform P3, $x_n \to 0$.

Exemplul 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$**, cu P4**

$|x_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ (P1). Conform P4, $x_n \to 0$.

Exemplul 7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = +\infty$**, cu P5**

Fie $x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Amplificăm cu conjugata:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Șirul $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ are termenii pozitivi, este strict crescător și nemărginit (este mai mare decât $\sqrt{n}$), deci, conform P1, $x_n \to 0$. Cum $x_n > 0$, conform P5, 1),

$$\frac{1}{x_n} \to +\infty.$$

Exemplul 8. Șirul $x_n = (-1)^n\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$**,** $n \ge 0$**, nu are limită**

Avem $x_n = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$, cu $a = -\dfrac{4}{3} \le -1$; conform tabelului, șirul nu are limită. Explicit:
$x_{2k} = \left(\frac{16}{9}\right)^k \to +\infty$, deoarece $\frac{16}{9} > 1$.
$x_{2k+1} = -\frac{4}{3}\left(\frac{16}{9}\right)^k$: pentru $\varepsilon > 0$, aplicăm rezultatul din Lecția 8 ($a^n \to +\infty$, $a > 1$) pentru $\frac{3\varepsilon}{4}$: de la un rang, $\left(\frac{16}{9}\right)^k > \frac{3\varepsilon}{4}$, deci $x_{2k+1} < -\varepsilon$. Așadar $x_{2k+1} \to -\infty$.
Două subșiruri cu limite diferite: șirul nu are limită.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

3. Exerciții propuse

1) Folosind P1, arătați că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3+2n}=0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4^n+2n}=0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+5}}=0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n+n^2}=0$.

2) Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{5}{n}\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{n^3}-\left(\dfrac{3}{7}\right)^n\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}-\dfrac{3}{2^n}\right)$.

3) Calculați, folosind P3:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{3}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{2^n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)\sin n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sin n-\cos n}{n}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+5}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n}$.

4) Calculați, folosind P5:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}$.

5) Calculați, folosind tabelul șirului putere:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}7)^n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1{,}2)^n$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^n$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n$.

6) Arătați că următoarele șiruri nu au limită: a) $x_n=(-2)^n$, $n\geq 0$; b) $x_n=(-1)^n\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$, $n\geq 0$.

7) Adevărat sau fals? Justificați.

a) Dacă $x_n+y_n\to 0$, atunci $x_n\to 0$ și $y_n\to 0$.

b) Dacă $x_n y_n\to 0$, atunci $x_n\to 0$ sau $y_n\to 0$.

c) Dacă $|x_n|\to 1$, atunci (x_n) are limită.

d) Dacă $x_n\to 0$, atunci $\dfrac{1}{x_n}\to+\infty$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0