Prof. Micu Elena

Lecția 11
Operații cu șiruri care au limită

Analiză matematică – clasa a XI-a

Material didactic.

În această lecție, $(a_n)_{n\geq n_0}$ și $(b_n)_{n\geq n_0}$ sunt două șiruri de numere reale, $n_0 \in \mathbb{N}$ fixat, cu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = l_2, \qquad l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Ideea lecției: **limita rezultatului unei operații este rezultatul operației cu limitele**, ori de câte ori operația cu limitele are sens în $\overline{\mathbb{R}}$.

1. Limita sumei

Teorema 1

Dacă operația $l_1 + l_2$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci șirul sumă $(a_n + b_n)_{n\geq n_0}$ are limită și

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = l_1 + l_2.$$

Reguli de calcul cu $\pm\infty$ (suma)

$$a + (+\infty) = +\infty, \qquad a + (-\infty) = -\infty, \qquad (\forall)\, a \in \mathbb{R};$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim(a_n + b_n)$
$a \in \mathbb{R}$	$b \in \mathbb{R}$	$a + b$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	nedeterminare

Observație. Cazul de nedeterminare $\infty - \infty$

Suma $l_1 + l_2$ **nu are sens** în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă una dintre limite este $+\infty$, iar cealaltă este $-\infty$. În acest caz rezultatul poate fi orice:

- $a_n = n + 5$, $b_n = -n$: $a_n + b_n = 5 \to 5$;
- $a_n = n^2$, $b_n = -n$: $a_n + b_n = n(n-1) \to +\infty$;
- $a_n = n$, $b_n = -2n$: $a_n + b_n = -n \to -\infty$;
- $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = -n$: $a_n + b_n = (-1)^n$, care nu are limită.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Pentru a calcula limita, expresia trebuie transformată (factor comun, amplificare cu conjugata etc.).

2. Limita produsului

Teorema 2

Dacă produsul $l_1 \cdot l_2$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci șirul produs $(a_n \cdot b_n)_{n \geq n_0}$ are limită și

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = l_1 \cdot l_2.$$

Reguli de calcul cu $\pm\infty$ (produsul) – „regula semnelor”

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty, \quad (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty, \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty;$$

$$a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases} \qquad a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$$

Teorema 3 (înmulțirea cu o constantă)

Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \cdot l_1.$$

De exemplu, pentru $\alpha > 0$: $\alpha \cdot (+\infty) = +\infty$, $\alpha \cdot (-\infty) = -\infty$; pentru $\alpha < 0$: $\alpha \cdot (+\infty) = -\infty$, $\alpha \cdot (-\infty) = +\infty$. Dacă $\alpha = 0$, șirul (αa_n) este șirul nul, cu limita 0.

Observație. Cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$

Produsul $0 \cdot (\pm\infty)$ nu are sens. De exemplu, pentru $a_n = n^2 \to +\infty$:

$$b_n = \frac{3}{n^2}:\ a_n b_n = 3 \to 3; \qquad b_n = \frac{1}{n}:\ a_n b_n = n \to +\infty; \qquad b_n = -\frac{1}{n^3}:\ a_n b_n = -\frac{1}{n} \to 0,$$

deși în toate cele trei cazuri $b_n \to 0$.

3. Limita câtului

Teorema 4

Fie $b_n \neq 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$. Dacă $\dfrac{l_1}{l_2}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci șirul cât are limită și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{l_1}{l_2}.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Reguli de calcul (câtul)

$$\frac{a}{+\infty}=0, \qquad \frac{a}{-\infty}=0, \qquad (\forall)\, a\in\mathbb{R};$$

$$\frac{+\infty}{b}=\begin{cases}+\infty, & b>0\\ -\infty, & b<0\end{cases} \qquad \frac{-\infty}{b}=\begin{cases}-\infty, & b>0\\ +\infty, & b<0\end{cases}$$

Împărțirea la 0. Dacă $b_n\to 0$ și $b_n>0$ de la un rang încolo (scriem $b_n\to 0_+$), respectiv $b_n<0$ de la un rang încolo ($b_n\to 0_-$), atunci

$$\frac{1}{0_+}=+\infty, \qquad \frac{1}{0_-}=-\infty; \qquad \text{în particular} \qquad \frac{1}{+\infty}=0_+, \quad \frac{1}{-\infty}=0_-.$$

Mai general, $\dfrac{a}{0_+}=+\infty$ pentru $a>0$ (sau $a=+\infty$) etc., după regula semnelor.

Observații

1) Cazurile de nedeterminare la cât sunt $\dfrac{0}{0}$ și $\dfrac{\infty}{\infty}$ (cu orice semne).

2) Dacă $b_n\to 0$, dar b_n își schimbă semnul de o infinitate de ori, șirul $\frac{1}{b_n}$ **nu are limită**. Exemplu: $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{1}{b_n}=(-1)^n n$.

4. Limita puterii

Teorema 5

Fie $a_n>0$, $(\forall)\, n\geq n_0$, $l_1\geq 0$ (sau $l_1=+\infty$). Dacă puterea $l_1^{l_2}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}=\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=l_1^{l_2}.$$

Reguli de calcul (puterea)

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim a_n^{b_n}$	scrierea simbolică
$a>1$	$+\infty$	$+\infty$	$a^{+\infty}=+\infty$
$a>1$	$-\infty$	0	$a^{-\infty}=0$
$0<a<1$	$+\infty$	0	$a^{+\infty}=0$
$0<a<1$	$-\infty$	$+\infty$	$a^{-\infty}=+\infty$
$+\infty$	$b>0$ (sau $+\infty$)	$+\infty$	$(+\infty)^b=+\infty$
$+\infty$	$b<0$ (sau $-\infty$)	0	$(+\infty)^b=0$
0_+	$b>0$ (sau $+\infty$)	0	$0^b=0$

Observație. Cazurile de nedeterminare la putere

$$1^{\pm\infty}, \qquad (\pm\infty)^0, \qquad 0^0.$$

De exemplu, $a_n=1+\frac{1}{n}\to 1$, dar a_n^n nu tinde la 1 (limita lui este numărul $e\approx 2{,}718$, care va fi studiat ulterior).

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Recapitulare: cele 7 cazuri de nedeterminare

$$\infty-\infty, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 1^{\pm\infty}, \qquad (\pm\infty)^0, \qquad 0^0.$$

În aceste cazuri nu se poate aplica direct regula „operația cu limitele”; expresia trebuie mai întâi transformată.

5. Probleme rezolvate

Problema 1. Limite calculate direct (operații care au sens)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3+2^n\right)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7-\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=7-0+0=7.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(-5\sqrt{n})=(-5)\cdot(+\infty)=-\infty.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\cdot n^2=2\cdot(+\infty)=+\infty.$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\frac{1}{n}}{n+1}=\dfrac{3}{+\infty}=0.$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)\cdot n=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty.$

Problema 2. Puteri

a) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{n+1}{n+2}}$: exponentul are limita 1 (deoarece $\frac{n+1}{n+2}=\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\to\frac{1}{1}$), deci limita este $2^1=2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}$: exponentul $\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 0\cdot 1=0$, deci limita este $\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n^2}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{+\infty}=0$, deoarece $0<\frac{2}{5}<1$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{-n}=3^{-\infty}=0.$

Problema 3. Cazul $\infty-\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$

Avem nedeterminarea $\infty-\infty$. Amplificăm cu conjugata:

$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\frac{(n+3)-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}.$$

Numitorul tinde la $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=\frac{3}{+\infty}=0.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Problema 4. Cazul $\infty-\infty$: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-n\right)$

Aducem la același numitor:

$$\frac{n^2}{n+2}-n=\frac{n^2-n^2-2n}{n+2}=\frac{-2n}{n+2}=\frac{-2}{1+\frac{2}{n}}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-n\right)=\frac{-2}{1+0}=-2.$$

Problema 5. Cazul $\infty-\infty$ la polinoame: $\lim_{n\to\infty}\left(n^2-6n\right)$

Dăm factor comun puterea cea mai mare a lui n:

$$n^2-6n=n^2\left(1-\frac{6}{n}\right),\qquad \lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{6}{n}\right)=(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty.$$

Problema 6. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+4}{2n-1}$

Dăm factor comun forțat n la numărător și la numitor:

$$\frac{5n+4}{2n-1}=\frac{n\left(5+\frac{4}{n}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{5+\frac{4}{n}}{2-\frac{1}{n}}\longrightarrow\frac{5+0}{2-0}=\frac{5}{2}.$$

Problema 7. Cazul $0\cdot\infty$: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\left(n^2+1\right)$

Primul factor tinde la 0, al doilea la $+\infty$. Scriem

$$\frac{n^2+1}{n+1}=\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=n\cdot\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\longrightarrow(+\infty)\cdot1=+\infty.$$

Problema 8. Împărțirea la $0_\pm$

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{n}}=\frac{2}{0_+}=+\infty$ (efectiv, $\frac{2}{1/n}=2n$).

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}-\frac{2}{\sqrt{n}}}$: numitorul $\frac{1}{n}-\frac{2}{\sqrt{n}}=\frac{1-2\sqrt{n}}{n}<0$ pentru $n\geq1$ și tinde la 0, deci numitorul tinde la 0_- și limita este $\frac{1}{0_-}=-\infty$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

6. Probleme propuse

1) Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+\sqrt{n}+3\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{3}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-2n^3-5^n\right)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{n^2}$.

2) Dați câte un exemplu de șiruri $a_n\to+\infty$ și $b_n\to-\infty$ astfel încât:
a) $a_n+b_n\to 3$; b) $a_n+b_n\to+\infty$; c) $a_n+b_n\to-\infty$; d) (a_n+b_n) nu are limită.

3) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3-10n^2\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-n^2\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-n)$, știind că $2^n\geq n^2$ pentru $n\geq 4$.

4) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$.

5) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n}-n\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{n-1}-2n\right)$.

6) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n+4}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-6n}{2n+5}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+7}{n^2+1}$.

7) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}5^{\frac{2n}{n+3}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}4^{\frac{1-n^2}{n}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n$.

8) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}-n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3}{\frac{1}{n^2}}$.

9) Arătați că șirul $x_n=\dfrac{n}{(-1)^n}$, $n\geq 1$, nu are limită, deși $|x_n|\to+\infty$.

10) Precizați care dintre următoarele expresii reprezintă cazuri de nedeterminare:

$$(+\infty)+(+\infty),\quad (+\infty)-(+\infty),\quad 0\cdot(-\infty),\quad \frac{5}{+\infty},\quad \frac{-\infty}{+\infty},\quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^{+\infty},\quad 1^{+\infty},\quad (+\infty)^0.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0