Prof. Micu Elena

Lecția 12
Șiruri tip. Șiruri remarcabile
Analiză matematică – clasa a XI-a

Material didactic.

În calculul limitelor folosim un număr mic de șiruri „de bază”, ale căror limite le cunoaștem. Împreună cu operațiile cu limite (Lecția 11), ele permit calculul majorității limitelor de șiruri.

1. Șirul constant

Șirul constant

Dacă $a_n = a$, $(\forall)\, n \geq n_0$, $a \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a = a.$$

Exemple: $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\sqrt{5} = \sin\sqrt{5}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 7 = \log_2 7$.

2. Șirul putere $a_n = n^\alpha$

Limita șirului putere

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $a_n = n^\alpha$, $n \geq 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Justificare. Cazul $\alpha > 0$ a fost demonstrat în Lecția 8. Pentru $\alpha = 0$ șirul este constant, egal cu 1. Pentru $\alpha < 0$,

$$n^\alpha = \frac{1}{n^{-\alpha}}, \quad -\alpha > 0, \quad \text{deci} \quad \lim_{n\to\infty} n^\alpha = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Exemple

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{10} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^4} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{4}{5}} = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{3}} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

3. Șirul exponențial $a_n = q^n$

Limita șirului exponențial

Fie $q \in \mathbb{R}$ și $a_n = q^n$, $n \geq 1$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ 0, & q \in (-1,1) \\ \text{nu există}, & q \leq -1 \end{cases}$$

Demonstrație

$q > 1$**:** Lecția 8 (inegalitatea lui Bernoulli). $q = 1$**:** șir constant.

$q \in (-1,1)$**:** pentru $q = 0$ șirul este nul. Pentru $q \neq 0$, avem $|q| < 1$, deci $\dfrac{1}{|q|} > 1$ și

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} |q|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Cum $|q^n| = |q|^n \to 0$ și $\lim x_n = 0 \iff \lim |x_n| = 0$, rezultă $q^n \to 0$.
$q = -1$**:** $(-1)^n$ are subșirurile $(-1)^{2k} = 1 \to 1$ și $(-1)^{2k+1} = -1 \to -1$, deci nu are limită.
$q < -1$**:** $q^{2k} = \left(q^2\right)^k \to +\infty$ (deoarece $q^2 > 1$), iar $q^{2k+1} = q \cdot \left(q^2\right)^k \to q \cdot (+\infty) = -\infty$; subșiruri cu limite diferite, deci șirul nu are limită. □

Exemple

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$; $\left(-\frac{1}{4}\right)^n \to 0$; $\left(\frac{7}{5}\right)^n \to +\infty$; $(-3)^{2n} = 9^n \to +\infty$; $(-2)^n$ nu are limită.

4. Șiruri polinomiale

Șirul polinomial

Fie $a_n = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0$, cu $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \neq 0$, $k \geq 1$ (gradul polinomului este k). Dăm factor comun forțat n^k:

$$a_n = n^k \left(\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{\alpha_1}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_0}{n^k}\right).$$

Paranteza tinde la α_k, deoarece $\frac{1}{n^j} \to 0$ pentru $j \geq 1$. Așadar

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_k n^k = \alpha_k \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \alpha_k > 0 \\ -\infty, & \alpha_k < 0 \end{cases}$$

Regulă: limita unui șir polinomial este limita **termenului de grad maxim** (termenul dominant).

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemple

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2-3n+5\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2n^2=+\infty.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n^3-6n^2+7n-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(5-\dfrac{6}{n}+\dfrac{7}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)=(+\infty)\cdot 5=+\infty.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-n^5+100n^3\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^5\right)=-\infty.$

Atenție

Nu se aplică regula termenului dominant „pe bucăți” fără justificare: în n^2-6n ambii termeni tind la infinit cu semne contrare (caz $\infty-\infty$); doar factorul comun forțat arată că limita este $+\infty$.

5. Șiruri raționale

Șirul rațional $x_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$

Fie $P(n)=a_pn^p+\cdots+a_0$, $a_p\neq 0$ (grad p) și $Q(n)=b_qn^q+\cdots+b_0$, $b_q\neq 0$ (grad q), cu $Q(n)\neq 0$ pentru $n\geq n_0$. Dând factor comun forțat n^p și n^q,

$$x_n=\frac{n^p\left(a_p+\frac{a_{p-1}}{n}+\cdots+\frac{a_0}{n^p}\right)}{n^q\left(b_q+\frac{b_{q-1}}{n}+\cdots+\frac{b_0}{n^q}\right)}=n^{p-q}\cdot\frac{a_p+\frac{a_{p-1}}{n}+\ldots}{b_q+\frac{b_{q-1}}{n}+\ldots},$$

unde fracția din dreapta tinde la $\dfrac{a_p}{b_q}$. Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases}\dfrac{a_p}{b_q}\cdot(+\infty)=\pm\infty\ \text{(semnul lui }\frac{a_p}{b_q}\text{)}, & p>q\\ \dfrac{a_p}{b_q}\ \text{(raportul coeficienților dominanți)}, & p=q\\ 0, & p<q\end{cases}$$

Exemple

a) **grad P < grad Q:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-1}{n^5+n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2-\frac{1}{n^3}\right)}{n^5\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{2-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}}=0\cdot 2=0.$$

b) **grad P = grad Q:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-8n^2+5n+3}{4n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(-8+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{-8}{4}=-2;\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^3+6}{7n^3+8}=-\frac{3}{7}.$$

c) **grad P > grad Q:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-10n^4+5}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(-10+\frac{5}{n^4}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{-10+\frac{5}{n^4}}{2+\frac{1}{n^2}}=(+\infty)\cdot(-5)=-\infty.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplu cu paranteze – se dezvoltă mai întâi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2-(n-3)^2}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n}{n^2+n}=0 \qquad (\text{grad } 1<\text{grad } 2).$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}-\frac{3n}{3n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(3n-1)-3n(n+1)}{(n+1)(3n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{3n^2+2n-1}=0.$$

6. Temă

1. Să se calculeze limitele șirurilor cu termenul general:

a) $x_n=2n+1$

b) $x_n=-n^2+n$

c) $x_n=\dfrac{n+3}{-3n+5}$

d) $x_n=\dfrac{n^2-1}{n^3+1}$

e) $x_n=\dfrac{n^2+n+1}{n^5+2}$

f) $x_n=\dfrac{n^4-2}{n^2-2}$

g) $x_n=\dfrac{n^2+n+1}{2n^2+n+1}$

h) $x_n=\dfrac{2n^3+2n+1}{3n^3-n+1}$

i) $x_n=\dfrac{n+1}{2n^2+n+1}$

2. Să se calculeze limitele șirurilor cu termenul general:

a) $x_n=\dfrac{4n^2+3n+1}{2n+1}$

b) $x_n=\dfrac{-2n^2+n+1}{2n+1}$

c) $x_n=\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

d) $x_n=\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{2n^2+n+1}$

e) $x_n=\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

f) $x_n=\dfrac{n+1}{n+2}-\dfrac{2n}{2n-1}$

g) $x_n=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n^2}{n^2+1}$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0