Prof. Micu Elena

Lecția 13
Observații și completări la operații cu șiruri care au limită

Analiză matematică – clasa a XI-a

Material didactic.

În Lecția 11 am văzut că limita rezultatului unei operații este rezultatul operației cu limitele, atunci când acesta are sens. Completăm acum lista operațiilor cu două noi: **extragerea radicalului** și **logaritmul** unui șir. Tratăm atât cazul șirurilor convergente (limită finită), cât și cazul șirurilor cu limita $\pm\infty$.

1. Radicalul de ordin par

Teorema 1 (radical de ordin par)

Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, k **par**, și $(a_n)_{n\geq n_0}$ un șir cu $a_n \geq 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$.

a) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in [0,+\infty)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{l}.$$

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = +\infty.$$

Regula: limita radicalului este egală cu radicalul limitei,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n},$$

cu convenția $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$.

Demonstrație pentru $k = 2$

a) Dacă $l = 0$: fie $\varepsilon > 0$; din $a_n \to 0$ există n_ε cu $a_n < \varepsilon^2$ pentru $n \geq n_\varepsilon$, deci

$$\sqrt{a_n} < \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon.$$

Dacă $l > 0$: amplificând cu conjugata,

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}\right| = \frac{|a_n - l|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}} \leq \frac{|a_n - l|}{\sqrt{l}}.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ există n_ε cu $|a_n - l| < \varepsilon\sqrt{l}$, $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, deci $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}\right| < \varepsilon$.

b) Fie $\varepsilon > 0$. Din $a_n \to +\infty$ există n_ε cu $a_n > \varepsilon^2$, $(\forall)\, n \geq n_\varepsilon$, deci

$$\sqrt{a_n} > \varepsilon, \quad (\forall)\, n \geq n_\varepsilon. \qquad \square$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Atenție

Radicalul de ordin par se aplică doar termenilor nenegativi. De aceea, pentru radicalul de ordin par, limita expresiei de sub radical nu poate fi negativă și nu poate fi $-\infty$. Dacă sub radical apare o expresie, verificăm mai întâi că este nenegativă (cel puțin de la un anumit rang).

2. Radicalul de ordin impar

Teorema 2 (radical de ordin impar)

Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, k **impar**, și $(a_n)_{n \geq n_0}$ un șir de numere reale (de orice semn).

a) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{l}$.

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = +\infty$.

c) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = -\infty$.

Convențiile de calcul sunt

$$\sqrt[k]{+\infty} = +\infty, \qquad \sqrt[k]{-\infty} = -\infty \qquad (k \text{ impar}).$$

Justificare pentru c). Radicalul de ordin impar este o funcție impară: $\sqrt[k]{a_n} = -\sqrt[k]{-a_n}$. Cum $-a_n \to +\infty$, din b) rezultă $\sqrt[k]{-a_n} \to +\infty$, deci $\sqrt[k]{a_n} \to -\infty$.

Tabel recapitulativ (radicali)

$\lim a_n$	$\lim \sqrt[k]{a_n}$, k par $(a_n \geq 0)$	$\lim \sqrt[k]{a_n}$, k impar
$l \geq 0$	$\sqrt[k]{l}$	$\sqrt[k]{l}$
$l < 0$	– (nu are sens)	$\sqrt[k]{l} = -\sqrt[k]{-l}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	– (nu are sens)	$-\infty$

3. Logaritmul unui șir

Teorema 3 (logaritmul unui șir convergent la un număr pozitiv)

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, și $(x_n)_{n \geq n_0}$ un șir cu $x_n > 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in (0, +\infty)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a l.$$

Teorema 4 (logaritmul în cazurile $x_n \to 0$ și $x_n \to +\infty$)

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, și $x_n > 0$, $(\forall)\, n \geq n_0$.

a) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Demonstrație pentru $a > 1$. a) Fie $\varepsilon > 0$. Din $x_n \to +\infty$ există n_ε cu $x_n > a^\varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$; funcția $\log_a$ fiind strict crescătoare, $\log_a x_n > \varepsilon$.
b) Fie $\varepsilon > 0$. Din $x_n \to 0$ există n_ε cu $0 < x_n < a^{-\varepsilon}$ pentru $n \geq n_\varepsilon$, deci $\log_a x_n < -\varepsilon$.
Pentru $0 < a < 1$ folosim $\log_a x_n = -\log_{1/a} x_n$, cu $\frac{1}{a} > 1$. □

Regula și convențiile pentru logaritm

Limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei:

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a \left(\lim_{n\to\infty} x_n \right),$$

cu convențiile

$$a > 1: \quad \log_a(+\infty) = +\infty, \quad \log_a 0_+ = -\infty; \qquad 0 < a < 1: \quad \log_a(+\infty) = -\infty, \quad \log_a 0_+ = +\infty.$$

$\lim x_n \ \ (x_n > 0)$	$\lim \log_a x_n, \ a > 1$	$\lim \log_a x_n, \ 0 < a < 1$
$l \in (0, +\infty)$	$\log_a l$	$\log_a l$
0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Atenție

Logaritmul se aplică doar termenilor strict pozitivi; de aceea limita expresiei de sub logaritm este un număr pozitiv, 0 (prin valori pozitive) sau $+\infty$. Nu confundați baza: pentru baze subunitare ($\log_{1/2}$, $\log_{0,1}$ etc.) semnele infiniturilor se inversează. Notații uzuale: $\ln = \log_e$, $\lg = \log_{10}$ (ambele cu baza supraunitară).

4. Probleme rezolvate

Problema 1. Radical de ordin par, limita $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 5n}$

Sub radical avem un șir polinomial cu termeni pozitivi:

$$n^2 + 5n = n^2 \left(1 + \frac{5}{n}\right) \longrightarrow (+\infty) \cdot 1 = +\infty.$$

Conform Teoremei 1 b),

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 5n} = \sqrt{+\infty} = +\infty.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Problema 2. Radical de ordin impar, limita $-\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{-2n^3+n^2+4}$

Sub radical:

$$-2n^3+n^2+4=n^3\left(-2+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}\right)\longrightarrow(+\infty)\cdot(-2)=-\infty.$$

Radicalul are ordin impar, deci, conform Teoremei 2 c),

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{-2n^3+n^2+4}=\sqrt[3]{-\infty}=-\infty.$$

Problema 3. Radical dintr-un șir convergent: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+2}{4n+1}}$

Fracția are termeni pozitivi și

$$\frac{n+2}{4n+1}=\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}}\longrightarrow\frac{1}{4}.$$

Conform Teoremei 1 a),

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{4n+1}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Problema 4. Radical de ordin impar, limită negativă: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{27n^2+1}{3-n^2}}$

Pentru $n\geq 2$, numitorul este negativ, deci termenii sunt negativi — radicalul de ordin impar este definit. Avem

$$\frac{27n^2+1}{3-n^2}=\frac{27+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}-1}\longrightarrow\frac{27}{-1}=-27,\qquad\text{deci}\qquad\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{27n^2+1}{3-n^2}}=\sqrt[3]{-27}=-3.$$

Problema 5. Radical cu limita 0: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{\dfrac{n+1}{n^3+2}}$

Grad numărător $1<$ grad numitor 3, deci $\dfrac{n+1}{n^3+2}\to 0$. Conform Teoremei 1 a),

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{n+1}{n^3+2}}=\sqrt[4]{0}=0.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Problema 6. Logaritm, limita $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{2n^2+n+3}{n+4}$

Fracția are termeni pozitivi și, deoarece gradul numărătorului este mai mare,

$$\frac{2n^2+n+3}{n+4} = n\cdot\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n}} \longrightarrow (+\infty)\cdot 2 = +\infty.$$

Baza $e>1$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{2n^2+n+3}{n+4} = \ln(+\infty) = +\infty.$$

Problema 7. Logaritm cu baza subunitară, argument $\to 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2n}{n^2+5}$

Avem $\dfrac{2n}{n^2+5} > 0$ și $\dfrac{2n}{n^2+5} \to 0$ (grad 1 $<$ grad 2). Baza $\frac{1}{3} \in (0,1)$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{3}} \frac{2n}{n^2+5} = \log_{\frac{1}{3}} 0_+ = +\infty.$$

Problema 8. Logaritm, argument $\to 0$, baza supraunitară: $\lim\limits_{n\to\infty} \lg \dfrac{n+1}{n^3+n+2}$

Argumentul este pozitiv și tinde la 0. Baza $10>1$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \lg \frac{n+1}{n^3+n+2} = \lg 0_+ = -\infty.$$

Problema 9. Logaritm dintr-un șir convergent: $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 \dfrac{16n+3}{2n+7}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{5}} \dfrac{n^2+1}{25n^2-n}$

a) $\dfrac{16n+3}{2n+7} \to \dfrac{16}{2} = 8$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{16n+3}{2n+7} = \log_2 8 = 3.$$

b) Pentru $n\geq 1$, $25n^2-n>0$, iar $\dfrac{n^2+1}{25n^2-n} \to \dfrac{1}{25}$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{5}} \frac{n^2+1}{25n^2-n} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25} = 2.$$

Problema 10. Logaritm cu baza subunitară, argument $\to +\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{0,5} \dfrac{n^3}{n+1}$

$\dfrac{n^3}{n+1} = n^2\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \to +\infty$, iar baza $0{,}5 \in (0,1)$, deci

$$\lim_{n\to\infty} \log_{0,5} \frac{n^3}{n+1} = \log_{0,5}(+\infty) = -\infty.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

5. Aplicații mixte (radical și logaritm)

Problema 11. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_3 \sqrt{\dfrac{81n^2+2}{n^2+n}}$

Aplicăm regulile „din interior spre exterior”:

$$\frac{81n^2+2}{n^2+n} \to 81 \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{81n^2+2}{n^2+n}} \to \sqrt{81} = 9 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \log_3 \sqrt{\frac{81n^2+2}{n^2+n}} = \log_3 9 = 2.$$

Problema 12. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{n^2+3}{n}}$

$\dfrac{n^2+3}{n} = n + \dfrac{3}{n} \to +\infty$, deci $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{n^2+3}{n} \to -\infty$ (baza subunitară). Radicalul are ordin impar, deci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}} \frac{n^2+3}{n}} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty.$$

Problema 13. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\log_2(n^2+1)}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[5]{\dfrac{1}{n^2+n}}$

a) $n^2+1 \to +\infty \Rightarrow \log_2(n^2+1) \to +\infty$ (și este pozitiv pentru $n \geq 1$) $\Rightarrow \sqrt{\log_2(n^2+1)} \to +\infty$.

b) $\dfrac{1}{n^2+n} \to 0_+ \Rightarrow \sqrt[5]{\dfrac{1}{n^2+n}} \to \sqrt[5]{0} = 0$, cu termeni pozitivi $\Rightarrow \ln \sqrt[5]{\dfrac{1}{n^2+n}} \to \ln 0_+ = -\infty$.

6. Probleme propuse

1) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+7n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^3+2n+1}$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2-5n^4+1}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{-n^3+4n}$.

2) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{9n+1}{n+3}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2n}{n^2+1}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^3}{4n+1}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{\dfrac{16n^4+n}{n^4+1}}$.

3) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8n-1}{1-n}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n^2+1}{n^2-4n}}$, $n \geq 5$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n^4}{2-n}}$.

4) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{n}{n^2+3}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_3 \dfrac{n^2}{n+2}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_5 \dfrac{25n^2+n}{n^2+1}$.

5) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3n+1}{n^2+n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{n^2+n+1}{2n+1}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{0,1} \dfrac{n+5}{10n+1}$.

6) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \lg \dfrac{1000n^3+1}{n^3+n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 \dfrac{n+1}{8n+3}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{n^2+1}{n^2+2}$.

7) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 \sqrt{\dfrac{16n+1}{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\log_3 \dfrac{9n^2+1}{n^2}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{n^2+n}$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

8) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\lg\dfrac{n}{n^2+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{\dfrac{1}{n+1}}$.

9) Determinați $a>0$, $a\neq 1$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a\dfrac{4n^2+1}{n^2+n}=2$.

10) Determinați $p\in(0,+\infty)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{pn^2+3}{n^2+1}}=3$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0