Prof. Micu Elena

Lecția 14
Calculul limitelor de șiruri în cazurile de nedeterminare (partea I)

Analiză matematică – clasa a XI-a

Material didactic.

În această lecție tratăm cazul

$$\frac{\infty}{\infty},$$

care apare la rapoarte în care atât numărătorul, cât și numitorul tind la infinit. Pentru rapoartele de polinoame (șiruri raționale) regula a fost stabilită în Lecția 12; aici tratăm rapoartele de **exponențiale** și de **radicali**, rapoartele aflate sub radical, în exponent sau sub logaritm, rapoartele de logaritmi și determinarea unor parametri.

Ideea generală

Se dă **factor comun forțat termenul dominant** la numărător și la numitor, apoi se simplifică. Termenul dominant este:

- la sume de exponențiale – exponențiala cu **baza cea mai mare**;
- la expresii cu radicali – **puterea cea mai mare** a lui n ($\sqrt{n^k} = n^{\frac{k}{2}}$, $\sqrt[3]{n^k} = n^{\frac{k}{3}}$ etc.).

Proprietăți folosite: $a^{n+1} = a \cdot a^n$, $\quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pentru $q \in (-1,1)$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ pentru $q > 1$.

1. Cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

1.1. Sume de puteri (exponențiale)

Metodă

La numărător și la numitor se dă factor comun forțat **exponențiala cu baza cea mai mare**. Rămân, în paranteze, puteri cu baze în $(0,1)$, care tind la 0:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \quad q \in (-1,1).$$

Puterile de forma a^{n+1}, a^{n+2} se scriu mai întâi $a \cdot a^n$, $a^2 \cdot a^n$. Puterile cu exponent negativ se scriu $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Modelul 1. Câte un termen dominant: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{5^n+3}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{5^n+2}$

a) Baza cea mai mare este 5:

$$\frac{2^n+1}{5^n+3}=\frac{5^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]}{5^n\left[1+\frac{3}{5^n}\right]}\ \longrightarrow\ \frac{0+0}{1+0}=0.$$

b)

$$\frac{5^n}{5^n+2}=\frac{5^n}{5^n\left(1+\frac{2}{5^n}\right)}=\frac{1}{1+\frac{2}{5^n}}\ \longrightarrow\ 1.$$

Modelul 2. Exponenți negativi: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+3^{-n}}{4^n+4^{-n}}$

$$\frac{3^n+3^{-n}}{4^n+4^{-n}}=\frac{3^n\left[1+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]}{4^n\left[1+\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot\frac{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{16}\right)^n}\ \longrightarrow\ 0\cdot 1=0.$$

(Am folosit $3^{-n}=3^n\cdot\frac{1}{9^n}$ și $4^{-n}=4^n\cdot\frac{1}{16^n}$.)

Modelul 3. Puteri a^{n+1}: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^n}{2^{n+1}+7^{n+1}}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{3^{n+1}+2\cdot 4^{n+1}}$

a) Scriem $2^{n+1}=2\cdot 2^n$, $7^{n+1}=7\cdot 7^n$ și dăm factor comun 7^n:

$$\frac{7^n\left[\left(\frac{2}{7}\right)^n+1\right]}{7^n\left[2\left(\frac{2}{7}\right)^n+7\right]}\ \longrightarrow\ \frac{0+1}{0+7}=\frac{1}{7}.$$

b) Factor comun 4^n:

$$\frac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]}{4^n\left[3\left(\frac{3}{4}\right)^n+8\right]}\ \longrightarrow\ \frac{1}{8}.$$

Modelul 4. Trei termeni: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+4^n+3\cdot 6^n}{2^{n+1}+3\cdot 4^n+6^{n+1}}$

Baza cea mai mare este 6:

$$\frac{6^n\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\right]}{6^n\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\left(\frac{2}{3}\right)^n+6\right]}\ \longrightarrow\ \frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Modelul 5. Baze dominante diferite și semne: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^n+7^n}{1-3^n+6^n}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-6^n}{4^n+6^{n+1}}$

a) La numărător domină 7^n, la numitor 6^n:

$$\frac{7^n\left[\left(\frac{1}{7}\right)^n+\left(\frac{2}{7}\right)^n+1\right]}{6^n\left[\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right]}=\left(\frac{7}{6}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n+\left(\frac{2}{7}\right)^n+1}{\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}\ \longrightarrow\ (+\infty)\cdot 1=+\infty.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

b) Factor comun 6^n:

$$\frac{6^n\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right]}{6^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+6\right]}\longrightarrow\frac{-1}{6}.$$

1.2. Logaritm sau radical dintr-un raport de exponențiale

Modelul 6. Logaritm sau radical dintr-un raport de exponențiale

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_2\dfrac{4^n+2^n}{4^{n+1}+3^n}$. Calculăm întâi limita argumentului:

$$\frac{4^n\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{4^n\left[4+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}\longrightarrow\frac{1}{4},\qquad\text{deci}\qquad\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{4^n+2^n}{4^{n+1}+3^n}=\log_2\frac{1}{4}=-2.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{9\cdot5^n+2^n}{5^{n+1}+1}}$. Argumentul:

$$\frac{5^n\left[9+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]}{5^n\left[5+\frac{1}{5^n}\right]}\longrightarrow\frac{9}{5},\qquad\text{deci limita este}\qquad\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

1.3. Rapoarte cu radicali

Modelul 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+n}}{n+3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n}}{\sqrt{n^2+1}+n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+n}}{\sqrt[3]{n^4+1}}$

Se dă factor comun forțat puterea dominantă a lui n la numărător și la numitor:

$$\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n+3}=\frac{n\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}\longrightarrow2;\qquad\frac{\sqrt[3]{8n^3+n}}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{n\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}\longrightarrow\frac{2}{2}=1;$$

$$\frac{\sqrt{n^3+n}}{\sqrt[3]{n^4+1}}=\frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}}=n^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^4}}}\longrightarrow+\infty.$$

1.4. Raport $\frac{\infty}{\infty}$ sub radical, în exponent sau sub logaritm

Metodă

Se calculează mai întâi limita raportului (cazul $\frac{\infty}{\infty}$, prin factor comun forțat), apoi se aplică regulile din Lecțiile 11 și 13:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{x_n}=\sqrt[k]{\lim_{n\to\infty}x_n},\qquad\lim_{n\to\infty}a^{x_n}=a^{\lim\limits_{n\to\infty}x_n},\qquad\lim_{n\to\infty}\log_a x_n=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right),$$

cu convențiile cunoscute pentru $\pm\infty$ și pentru 0_+.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Modelul 8. Raport sub radical

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4n+1}{n+3}}$: $\dfrac{4n+1}{n+3}=\dfrac{4+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\to 4$, deci limita este $\sqrt{4}=2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8n^2+n}{1-n^2}}$: $\dfrac{8n^2+n}{1-n^2}=\dfrac{8+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-1}\to -8$, deci limita este $\sqrt[3]{-8}=-2$ (ordin impar).

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n^3}{2-n}}$: $\dfrac{n^3}{2-n}=n^2\cdot\dfrac{1}{\frac{2}{n}-1}\to(+\infty)\cdot(-1)=-\infty$, deci limita este $\sqrt[3]{-\infty}=-\infty$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{\dfrac{n^3+1}{16n^3+n}}$: raportul $\to\dfrac{1}{16}$, deci limita este $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{2}$.

Modelul 9. Raport în exponent

a) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{3n+1}{n+2}}$: exponentul $\to 3$, deci limita este $2^3=8$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{\frac{4n^2+1}{n^2+n}}}$: $\dfrac{4n^2+1}{n^2+n}\to 4$, exponentul $\to\sqrt{4}=2$, deci limita este $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}$: $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 0$, deci limita este $3^0=1$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}7^{\sqrt[3]{\frac{16n^2+1}{2n^2+n}}}$: raportul $\to 8$, exponentul $\to\sqrt[3]{8}=2$, deci limita este $7^2=49$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{3^n}{4^n-1}}$: $\dfrac{3^n}{4^n-1}=4\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\to 0$, deci limita este $2^0=1$.

Modelul 10. Raport sub logaritm

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_2\dfrac{8n+1}{n+3}=\log_2 8=3$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{n+1}{9n+2}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}=2$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{n^2+1}{n^3+2}$: raportul $\to 0_+$ (grad $2<3$), baza $e>1$, deci limita este $-\infty$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\lg\dfrac{n^2+1}{100n^2+n}=\lg\dfrac{1}{100}=-2$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

1.5. Rapoarte de logaritmi

Metodă

Sub fiecare logaritm se dă factor comun forțat termenul dominant, apoi se aplică proprietățile logaritmilor:

$$\ln\left(n^k(1+\dots)\right)=k\ln n+\ln(1+\dots),\qquad \ln\left(a^n(1+\dots)\right)=n\ln a+\ln(1+\dots).$$

Se împarte apoi numărătorul și numitorul prin $\ln n$, respectiv prin n.

Modelul 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+3)}{\ln(n+1)}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^3+n)}$

a) $\ln(n+3)=\ln n+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$, $\ln(n+1)=\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Împărțim prin $\ln n\to+\infty$:

$$\frac{1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\longrightarrow\frac{1+0\cdot 0}{1+0\cdot 0}=1.$$

b) $\ln(n^2+1)=2\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, $\ln(n^3+n)=3\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{3+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

Modelul 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+3^n)}{n+1}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+2^n)}{\ln(1+8^n)}$

a) $\ln(1+3^n)=\ln\left[3^n\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\right]=n\ln 3+\ln\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$. Împărțim prin n:

$$\frac{\ln 3+\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1+\frac{1}{n}}\longrightarrow\frac{\ln 3+0\cdot\ln 1}{1+0}=\ln 3.$$

b) Analog, $\ln(1+2^n)=n\ln 2+\ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ și $\ln(1+8^n)=n\ln 8+\ln\left(1+\left(\frac{1}{8}\right)^n\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2+\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\ln 8+\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{1}{8}\right)^n\right)}=\frac{\ln 2}{\ln 8}=\frac{\ln 2}{3\ln 2}=\frac{1}{3}.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

1.6. Determinarea unor parametri

Metodă

Se calculează limita în funcție de parametri (de regulă, raportul coeficienților dominanți), apoi se pune condiția din enunț. Atenție la cazurile particulare în care coeficientul dominant este 0: gradul se schimbă și limita se calculează altfel.

Modelul 13. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an+3}{2n-b} = 3$. Grade egale, deci limita este $\dfrac{a}{2}$. Din $\dfrac{a}{2} = 3$ rezultă $a = 6$, iar b poate fi orice număr real (numitorul este nenul de la un anumit rang).

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an+2}{bn+1} = \dfrac{3}{4}$. Dacă $b = 0$, șirul este $an+2$, cu limita $\pm\infty$ sau 2 – nu convine. Deci $b \neq 0$, limita este $\dfrac{a}{b}$ și $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4}$, adică $a = \dfrac{3b}{4}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{an+1}{n+b} - \dfrac{2n+1}{n+3}\right) = 1$. Fiecare fracție are limită finită: $\dfrac{an+1}{n+b} \to a$, $\dfrac{2n+1}{n+3} \to 2$. Deci $a-2=1$, adică $a=3$, iar $b \in \mathbb{R}$ (numitorul este nenul de la un anumit rang).

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^2+n+1}{2n+1}$ să fie finită; aflați valoarea limitei. Dacă $a \neq 0$, gradul numărătorului (2) este mai mare decât al numitorului, deci limita este $\pm\infty$. Așadar $a = 0$, iar limita este $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Modelul 14. Parametru la o exponențială: determinați $a > 0$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{2n}+3^n}{4^n+3^n} = 1$

Scriem $a^{2n} = \left(a^2\right)^n$. La numitor domină 4^n:

$$\frac{\left(a^2\right)^n + 3^n}{4^n+3^n} = \frac{\left(\frac{a^2}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

- dacă $a^2 > 4$: $\left(\frac{a^2}{4}\right)^n \to +\infty$, limita este $+\infty$;
- dacă $a^2 < 4$: $\left(\frac{a^2}{4}\right)^n \to 0$, limita este 0;
- dacă $a^2 = 4$: limita este $\dfrac{1+0}{1+0} = 1$.

Cum $a > 0$, rezultă $a = 2$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

1.7. Rapoarte cu mai mulți radicali

Modelul 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{9n+\sqrt{n^2+4}}{n+1}}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+n+1}-\sqrt{n^2+2}}{n}$

a) Sub radicalul exterior forțăm n peste tot:

$$\frac{9n+\sqrt{n^2+4}}{n+1}=\frac{n\left(9+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\ \longrightarrow\ 9+1=10,\qquad \text{deci limita este } \sqrt{10}.$$

b) Numărătorul este de tip $\infty-\infty$, dar coeficienții dominanți diferă, deci forțăm n:

$$\frac{n\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}{n}\ \longrightarrow\ \sqrt{3}-1.$$

2. Probleme propuse

1) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2}{6^n+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+2^{-n}}{5^n+5^{-n}}$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n+1}{4^n+3}$.

2) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^{-n}}{3^n+2^{-n}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n+1}{6^n+5^n}$.

3) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+8^n}{3^{n+1}+8^{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+6^n}{5^{n+1}+4\cdot 6^{n+1}}$.

4) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^n+2\cdot 7^n}{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4^n+9^n}{1-5^n+8^n}$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-5^n}{2^n+5^{n+1}}$.

5) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5^n+3\cdot 6^n}{4^n+6^{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+7^n}{5^n+6^n}$.

6) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_3\dfrac{9^n+2^n}{9^{n+1}+7^n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{4^{n+1}+3^n}{4^n+1}}$.

7) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\lg\dfrac{10^{n+1}+3^n}{10^n+2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2^n+1}{2^{n+2}+1}$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{8^{n+1}+5^n}{8^n+7^n}}$.

8) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+2}}{3n-1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5+1}}{\sqrt{n^3+2}}$.

9) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-n+1}}{n+2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+3}}$;

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n+4}}$.

10) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{9n-1}{n+4}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n^2}{1-27n^2}}$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{n^2+1}{3-n}}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{\dfrac{n^3+2n}{32n^3+1}}$.

11) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{2n-1}{n+5}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{\frac{9n^2+n}{n^2+1}}}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} 5^{\frac{\sqrt{n}}{n+2}}$;
d) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt[3]{\frac{27n^3+1}{n^3+n}}}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{2^n}{5^n-1}}$.

12) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_3 \dfrac{27n+2}{n+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{n+3}{4n+1}$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \lg \dfrac{n+1}{n^2+5}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{n^3+1}{n^2+2}$.

13) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+5)}{\ln(n+2)}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^4+n)}{\ln(n^2+1)}$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+5^n)}{n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+3^n)}{\ln(1+9^n)}$.

14) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât:
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an-1}{4n+b} = \dfrac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an+5}{bn-2} = 2$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{an+2}{n+b} - \dfrac{3n-1}{n+1}\right) = 2$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^2+3n}{n+4} = 3$.

15) Determinați $a>0$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{2n}+2^n}{9^n+2^n} = 1$.

16) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{9n^2+1}}{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{5n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{n}$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0