Prof. Micu Elena

Lecția 14
Calculul limitelor de șiruri în cazurile de nedeterminare (partea a II-a)

Analiză matematică – clasa a XI-a

Material didactic.

Când operația cu limitele nu are sens (Lecția 11), rezultatul nu se poate citi direct: șirul se **transformă** mai întâi algebric, apoi se aplică regulile cunoscute. În partea I am tratat cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Acum prezentăm, pe tipuri, modelele de calcul pentru cazul

$$\infty - \infty,$$

precum și pentru produsele de tip $0 \cdot \infty$ care se reduc la el.

Instrumente de lucru

1) **Factor comun forțat** – puterea cea mai mare a lui n (la polinoame și radicali) sau exponențiala cu baza cea mai mare (la sume de puteri).

2) **Amplificarea cu conjugata** – pentru diferențe de radicali de același ordin, cu **aceiași coeficienți dominanți**:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \qquad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}.$$

3) **Proprietățile puterilor și ale logaritmilor** – $a^{n+1}=a\cdot a^n$, $\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}$.

2. Cazul de nedeterminare $\infty - \infty$

2.1. Radicali – factor comun forțat

Metodă

Dacă radicalii au **coeficienți dominanți diferiți** sau **grade (puteri dominante) diferite**, se dă factor comun forțat puterea cea mai mare a lui n. Paranteza obținută are o limită nenulă, deci limita este $+\infty$ sau $-\infty$, după semnul acesteia:

$$\sqrt{a_k n^k+\ldots}=n^{\frac{k}{2}}\sqrt{a_k+\ldots}, \qquad \sqrt[3]{a_k n^k+\ldots}=n^{\frac{k}{3}}\sqrt[3]{a_k+\ldots}.$$

Modelul 1. Același grad, coeficienți dominanți diferiți (radicali de ordinul 2)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{4n^2+1}\right)$:

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{4n^2+1}=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\right)\longrightarrow(+\infty)\cdot(1-2)=-\infty.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^4+n}-\sqrt{n^4+3}\right)$:

$$n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n^3}}-\sqrt{1+\frac{3}{n^4}}\right)\longrightarrow(+\infty)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=+\infty,\quad\text{deoarece }\sqrt{2}-1>0.$$

Modelul 2. Același grad, coeficienți diferiți (radicali de ordin 3 și 5)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}\right)=(+\infty)\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=+\infty.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{3n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{3+\frac{1}{n}}\right)=(+\infty)\cdot\left(1-\sqrt[3]{3}\right)=-\infty.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[5]{3n^2+n}-\sqrt[5]{n^2+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{2}{5}}\left(\sqrt[5]{3+\frac{1}{n}}-\sqrt[5]{1+\frac{2}{n^2}}\right)=(+\infty)\cdot\left(\sqrt[5]{3}-1\right)=+\infty.$

Modelul 3. Puteri dominante diferite

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+3}\right)$. Puterile dominante: n și $n^{\frac{1}{2}}$; forțăm n:

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)\longrightarrow(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+5n}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$. Puterile dominante: $n^{\frac{2}{3}}$ și n; forțăm n:

$$n\left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}-\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^3}}\right)\longrightarrow(+\infty)\cdot(0-1)=-\infty.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right)$. Puterile dominante: n^2 și n; forțăm n^2:

$$n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}-\frac{1}{n}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)\longrightarrow(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty.$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt[3]{n^6+2}\right)$. Puterile dominante: n și n^2; forțăm n^2:

$$n^2\left(\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^6}}\right)\longrightarrow(+\infty)\cdot(0-1)=-\infty.$$

Modelul 4. Radical minus polinom: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+1}-n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-2n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+n}-2n\right)$

Dăm factor comun n:

$$\sqrt{4n^2+1}-n=n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-1\right)\longrightarrow(+\infty)\cdot(2-1)=+\infty;$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

$$\sqrt{n^2+3n}-2n = n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-2\right) \longrightarrow (+\infty)\cdot(1-2) = -\infty;$$

$$\sqrt{3n^2+n}-2n = n\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}}-2\right) \longrightarrow (+\infty)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right) = -\infty, \quad \text{deoarece } \sqrt{3}<2.$$

Atenție

Dacă după factorul comun forțat paranteza tinde la 0 (coeficienți dominanți **egali**), se obține $\infty\cdot 0$ – o nouă nedeterminare. În acest caz se folosește amplificarea cu conjugata (2.2).

2.2. Radicali – amplificarea cu conjugata

Modelul 5. Radicali de ordinul 2 cu limita 0: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-3}\right)$

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \frac{(n+2)-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \longrightarrow \frac{2}{+\infty} = 0;$$

$$\sqrt{n^2+4}-n = \frac{n^2+4-n^2}{\sqrt{n^2+4}+n} = \frac{4}{\sqrt{n^2+4}+n} \longrightarrow 0;$$

$$n-\sqrt{n^2-3} = \frac{n^2-(n^2-3)}{n+\sqrt{n^2-3}} = \frac{3}{n+\sqrt{n^2-3}} \longrightarrow 0.$$

Modelul 6. Radicali de ordinul 2 cu limită finită nenulă

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}\right)$:

$$\frac{(n^2+3n)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{3n-1}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{3}{2}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$:

$$\frac{6n-3}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2-2n+3}} = \frac{6-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}} \longrightarrow \frac{6}{2} = 3.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$:

$$\frac{5n}{\sqrt{n^2+5n}+n} = \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1} \longrightarrow \frac{5}{2}.$$

Regulă practică: pentru $\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+cn+d}$ limita este $\dfrac{a-c}{2}$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Modelul 7. Radicali de ordinul 3: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$

Notăm $a=\sqrt[3]{n^3+3n^2}$, $b=\sqrt[3]{n^3+n^2}$ și folosim $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$:

$$a^3-b^3=2n^2,\qquad a^2+ab+b^2=n^2\left[\sqrt[3]{\left(1+\tfrac{3}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\tfrac{3}{n}\right)\left(1+\tfrac{1}{n}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^2}\right].$$

Paranteza dreaptă tinde la $1+1+1=3$, deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)=\frac{2}{3}.$$

Modelul 8. Radicali de ordinul 3 cu limita 0: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3-n}\right)$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2-n+1}\right)$

a) $a^3-b^3=2n$, iar $a^2+ab+b^2=n^2\cdot[\dots]$, cu paranteza $\to 3$:

$$\frac{2n}{n^2[\dots]}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{[\dots]}\longrightarrow 0\cdot\frac{2}{3}=0.$$

b) $a^3-b^3=3n-1$, iar $a^2+ab+b^2=n^{\frac{4}{3}}\cdot[\dots]$, cu paranteza $\to 3$:

$$\frac{3n-1}{n^{\frac{4}{3}}[\dots]}=\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{3-\frac{1}{n}}{[\dots]}\longrightarrow 0\cdot 1=0.$$

Modelul 9. Discuție după un parametru: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-an\right)$, $a\in\mathbb{R}$

$$\sqrt{n^2+n+1}-an=n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-a\right),\qquad \text{paranteza}\to 1-a.$$

- $a<1$: limita este $(+\infty)\cdot(1-a)=+\infty$; $\quad a>1$: limita este $-\infty$;
- $a=1$: cu conjugata, $\sqrt{n^2+n+1}-n=\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\to\dfrac{1}{2}$.

2.3. Diferențe de exponențiale

Modelul 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4^n-5^n\right)$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7^n-2\cdot 6^{n+1}\right)$

Dăm factor comun exponențiala cu baza cea mai mare:

$$4^n-5^n=5^n\left[\left(\frac{4}{5}\right)^n-1\right]\longrightarrow(+\infty)\cdot(0-1)=-\infty;$$

$$7^n-2\cdot 6^{n+1}=7^n\left[1-12\left(\frac{6}{7}\right)^n\right]\longrightarrow(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

2.4. Diferențe de logaritmi

Modelul 11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln(2n^2+1)-\ln(n^2+n)\right]$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\log_3(n+1)-\log_3(9n+2)\right]$

Diferența de logaritmi în aceeași bază devine logaritmul unui cât:

$$\ln(2n^2+1)-\ln(n^2+n)=\ln\frac{2n^2+1}{n^2+n}\longrightarrow\ln 2;$$

$$\log_3(n+1)-\log_3(9n+2)=\log_3\frac{n+1}{9n+2}\longrightarrow\log_3\frac{1}{9}=-2.$$

2.5. Produse $0\cdot\infty$ care conțin diferențe de radicali

Metodă

Diferența de radicali tinde la 0, iar factorul din față la $+\infty$. Amplificăm diferența cu conjugata; după simplificare, gradul numărătorului scade și cazul de nedeterminare dispare.

Modelul 12. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+4}}-\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right)$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{\frac{n+3}{n+4}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$

a) Cu $A=\dfrac{n+1}{n+4}$, $B=\dfrac{n}{n+2}$, avem $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ și

$$A-B=\frac{(n+1)(n+2)-n(n+4)}{(n+4)(n+2)}=\frac{2-n}{(n+4)(n+2)}.$$

Deci

$$n\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)=\frac{n(2-n)}{(n+4)(n+2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\longrightarrow(-1)\cdot\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

b) Cu $A=\dfrac{n+3}{n+4}$, $B=\dfrac{n+1}{n+2}$:

$$A-B=\frac{(n+3)(n+2)-(n+1)(n+4)}{(n+4)(n+2)}=\frac{2}{(n+4)(n+2)},$$

$$n^2\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)=\frac{2n^2}{(n+4)(n+2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\longrightarrow\frac{2}{2}=1.$$

Modelul 13. Trei radicali: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4}-2\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)$

Grupăm termenii în două diferențe și amplificăm fiecare cu conjugata:

$$\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}\right)-\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=\frac{2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\longrightarrow 0-0=0.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

2.6. Funcții trigonometrice și partea fracționară

Metodă

Se folosește periodicitatea: $\sin^2(x+k\pi)=\sin^2 x$, $\cos^2(x+k\pi)=\cos^2 x$, $\sin(x+2k\pi)=\sin x$, $\sin(x+k\pi)=(-1)^k\sin x$, $k\in\mathbb{Z}$. Din argument se scade un multiplu convenabil de π (de exemplu $n\pi$), astfel încât să apară o diferență de tip $\infty-\infty$ cu limită finită. Pentru partea fracționară se folosește $\{x\}=x-[x]$, după ce se încadrează radicalul între două numere naturale consecutive.

Modelul 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right)$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right)$

a) $\cos^2\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right)=\cos^2\left(\pi\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)+2n\pi\right)=\cos^2\left(\pi\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\right)$, iar

$$\sqrt{4n^2+n}-2n=\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\longrightarrow\frac{1}{4},\qquad\text{deci limita este }\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}.$$

b) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right)=\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)+n\pi\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\right)$. Cum $\sqrt{n^2+2}-n=\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}\to 0$, avem

$$\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right)\right|=\left|\sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)\right)\right|\longrightarrow\sin 0=0,\qquad\text{deci limita este }0.$$

Modelul 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(2\pi\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+3n}\right\}$

a) $\cos\left(2\pi\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)=\cos\left(2\pi\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)\right)$, iar

$$\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n=\frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}\longrightarrow\frac{2}{3},\qquad\text{deci limita este }\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

b) Pentru $n\geq 2$: $(n+1)^2=n^2+2n+1<n^2+3n<n^2+4n+4=(n+2)^2$, deci $\left[\sqrt{n^2+3n}\right]=n+1$ și

$$\left\{\sqrt{n^2+3n}\right\}=\sqrt{n^2+3n}-n-1\longrightarrow\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

2.7. Determinarea unor parametri

Modelul 16. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+bn+2}{n+2}-an\right)=2$. Aducem la același numitor:

$$\frac{3n^2+bn+2-an^2-2an}{n+2}=\frac{(3-a)n^2+(b-2a)n+2}{n+2}.$$

Limita este finită numai dacă $3-a=0$, adică $a=3$; atunci limita este $b-6=2$, deci $b=8$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(2a-1)n^3+bn^2+1}{an^2+n}-n\right)=2$. Numărătorul fracției obținute este $(a-1)n^3+(b-$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

1)n^2+1. Pentru $a\neq 1$ limita este infinită, deci $a=1$, iar atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(b-1)n^2+1}{n^2+n}=b-1=2\ \Rightarrow\ b=3.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n+1}-\sqrt{an^2+bn+5}\right)=1$. Dacă $a\neq 4$, limita este $\pm\infty$ (Modelul 1); deci $a=4$. Cu conjugata,

$$\frac{(1-b)n-4}{\sqrt{4n^2+n+1}+\sqrt{4n^2+bn+5}}\ \longrightarrow\ \frac{1-b}{2+2}=\frac{1-b}{4}=1\ \Rightarrow\ b=-3.$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(an+\sqrt{bn^2+3}\right)=2$. Trebuie $b>0$ și $a+\sqrt{b}=0$ (altfel limita este infinită), deci $a=-\sqrt{b}$. Atunci

$$n\left(\sqrt{bn^2+3}-\sqrt{b}\,n\right)=\frac{3n}{\sqrt{bn^2+3}+\sqrt{b}\,n}\ \longrightarrow\ \frac{3}{2\sqrt{b}}=2\ \Rightarrow\ \sqrt{b}=\frac{3}{4},\quad b=\frac{9}{16},\quad a=-\frac{3}{4}.$$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{\frac{n+a}{n+b}}-1\right)=1$. Cu conjugata,

$$n\left(\sqrt{\frac{n+a}{n+b}}-1\right)=\frac{n\cdot\frac{a-b}{n+b}}{\sqrt{\frac{n+a}{n+b}}+1}\ \longrightarrow\ \frac{a-b}{2}=1\ \Rightarrow\ a-b=2.$$

3. Probleme propuse

1) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{9n^2+1}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^4+n}-\sqrt{n^4+1}\right)$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{4n^3+n}\right)$.

2) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{2n^2+n}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[5]{n^2+1}-\sqrt[5]{2n^2+n}\right)$.

3) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n+1}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^3+4}\right)$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+n}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$.

4) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+2}-n\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-3n\right)$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-2n\right)$.

5) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-4n}\right)$.

6) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+6n^2}-n\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)$.

7) Discutați după $a\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-an\right)$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

8) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n-6^n)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5^{n+1}-4^{n+2}\right)$.

9) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln(3n^2+n)-\ln(n^2+2)\right]$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\log_2(n^2+1)-\log_2(8n^2+n)\right]$.

10) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n+3}}-\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+6}-2\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)$.

11) Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+5n}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\sqrt{9n^2+n}\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+5n}\right\}$.

12) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+bn+1}{n+3}-an\right)=1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+2n}-\sqrt{an^2+bn+1}\right)=1$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(an+\sqrt{bn^2+5}\right)=1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\dfrac{n+a}{n+b}}-1\right)=3$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0