Prof. Micu Elena

Lecția 4
Șiruri mărginite

Analiză matematică – clasa a XI-a

Probleme rezolvate

Material didactic.

A. Să se studieze mărginirea șirurilor

Exemplul 1. $x_n = \dfrac{3n+1}{n+2},\ n \geq 1$

Scoatem întregii din fracție. Deoarece

$$3n+1 = 3(n+2)-5,$$

avem

$$x_n = \frac{3(n+2)-5}{n+2} = 3 - \frac{5}{n+2}.$$

Pentru $n \geq 1$ avem $n+2 \geq 3$, deci

$$0 < \frac{5}{n+2} \leq \frac{5}{3}.$$

Scădem din 3 și obținem

$$3 - \frac{5}{3} \leq x_n < 3, \quad \text{adică} \quad \frac{4}{3} \leq x_n < 3,\ (\forall)\, n \geq 1.$$

Șirul este mărginit: $x_n \in \left[\frac{4}{3}, 3\right),\ (\forall)\, n \geq 1$.

Exemplul 2. $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n},\ n \geq 1$

Separăm cazurile după paritatea lui n.
Dacă n este par, $(-1)^n = 1$ și

$$x_n = \frac{3}{n} \leq \frac{3}{2}, \quad \text{deoarece } n \geq 2.$$

Dacă n este impar, $(-1)^n = -1$ și

$$x_n = \frac{1}{n} \leq 1.$$

În ambele cazuri $x_n > 0,\ (\forall)\, n \geq 1$. Deci

$$0 < x_n \leq \frac{3}{2},\ (\forall)\, n \geq 1,$$

iar șirul este mărginit.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 3. $x_n = \dfrac{5\cdot 2^n + 3^n}{2\cdot 3^n + 2^n},\ n \geq 0$

Evident $x_n > 0$, $(\forall)\, n \geq 0$. Pentru $n \geq 0$ avem $2^n \leq 3^n$. Atunci majorăm numărătorul:

$$5\cdot 2^n + 3^n \leq 5\cdot 3^n + 3^n = 6\cdot 3^n,$$

iar numitorul îl minorăm, folosind $2^n > 0$:

$$2\cdot 3^n + 2^n > 2\cdot 3^n.$$

O fracție cu numărător mai mare și numitor mai mic este mai mare, deci

$$x_n < \frac{6\cdot 3^n}{2\cdot 3^n} = 3, \quad (\forall)\, n \geq 0.$$

Așadar $0 < x_n < 3$, $(\forall)\, n \geq 0$, și șirul este mărginit.

Exemplul 4. $x_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n},\ n \geq 0$

Amplificăm cu expresia conjugată $\sqrt{n+4} + \sqrt{n}$ și folosim $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$x_n = \frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{(n+4) - n}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}.$$

Pentru $n \geq 0$ avem $\sqrt{n+4} \geq \sqrt{4} = 2$ și $\sqrt{n} \geq 0$, deci numitorul este cel puțin 2:

$$0 < x_n \leq \frac{4}{2} = 2,\ (\forall)\, n \geq 0.$$

Șirul este mărginit: $x_n \in (0, 2]$, $(\forall)\, n \geq 0$.

Exemplul 5. $x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n,\ n \geq 0$

Pentru $n = 0$ avem $x_0 = 0$. Fie $n \geq 1$ și notăm $a = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}$. Folosim formula

$$a^3 - n^3 = (a-n)(a^2 + an + n^2),$$

de unde

$$x_n = a - n = \frac{a^3 - n^3}{a^2 + an + n^2} = \frac{n^3 + 2n^2 - n^3}{a^2 + an + n^2} = \frac{2n^2}{a^2 + an + n^2}.$$

Din $n^3 + 2n^2 > n^3$ rezultă $a > n$, deci

$$a^2 + an + n^2 > n^2 + n^2 + n^2 = 3n^2.$$

Atunci

$$0 < x_n < \frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3},\ (\forall)\, n \geq 1.$$

Împreună cu $x_0 = 0$: $0 \leq x_n < \dfrac{2}{3}$, $(\forall)\, n \geq 0$. Șirul este mărginit.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 6. $x_n = \dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2+3n+5},\ n \geq 1$

Calculăm suma de la numărător, $S = 2+4+6+\cdots+2n$.
Numărul de termeni este

$$(2n-2):2+1 = n.$$

Scriem suma crescător și descrescător și adunăm pe coloane:

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & 2 & + & 4 & + & \ldots & + & 2n \\ S & = & 2n & + & (2n-2) & + & \ldots & + & 2 \\ \hline 2S & = & (2n+2) & + & (2n+2) & + & \ldots & + & (2n+2) \end{array}$$

Deci $2S = n(2n+2)$, de unde $S = n(n+1)$. Atunci

$$x_n = \frac{n^2+n}{n^2+3n+5}.$$

Numărătorul și numitorul sunt pozitivi, iar $n^2+n < n^2+3n+5$, deci

$$0 < x_n < 1,\ (\forall)\, n \geq 1.$$

Șirul este mărginit.

Exemplul 7. $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)},\ n \geq 1$

Descompunem termenul de rang k în fracții simple (metoda coeficienților nedeterminați). Căutăm A, B astfel încât

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{A}{3k-2} + \frac{B}{3k+1}.$$

Aducem la același numitor:

$$1 = A(3k+1) + B(3k-2) = 3(A+B)k + (A-2B).$$

Prin identificarea coeficienților: $A+B=0$ și $A-2B=1$, de unde $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$. Deci

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right).$$

Scriem fiecare termen al sumei astfel:

$$x_n = \frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right].$$

Termenii din mijloc se reduc doi câte doi și rămâne

$$x_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{n}{3n+1}.$$

Pentru $n \geq 1$ avem $0 < \frac{1}{3n+1} \leq \frac{1}{4}$, deci $\frac{3}{4} \leq 1 - \frac{1}{3n+1} < 1$ și

$$\frac{1}{4} \leq x_n < \frac{1}{3},\ (\forall)\, n \geq 1.$$

Șirul este mărginit.

Observație. Cu semnul Σ, șirul se scrie $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 8. $x_0 = 0,\ x_n - x_{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n,\ n \geq 1$

Scriem relația de recurență pentru $n, n-1, \ldots, 1$:

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \\ x_{n-1} - x_{n-2} &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &\vdots \\ x_1 - x_0 &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Adunăm membru cu membru; termenii $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ se reduc și, cum $x_0 = 0$,

$$x_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Aceasta este suma a n termeni ai unei progresii geometrice cu primul termen $b_1 = \frac{1}{4}$ și rația $q = \frac{1}{4}$. Aplicăm formula

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}: \qquad x_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

Deoarece $0 < \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 1$, obținem

$$0 \leq x_n < \frac{1}{3},\ (\forall)\, n \geq 0.$$

Șirul este mărginit.

Exemplul 9. $x_n = \left(1 - \frac{4}{3^2}\right)\left(1 - \frac{4}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4}{n^2}\right),\ n \geq 3$

Fiecare factor se scrie, folosind $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$1 - \frac{4}{k^2} = \frac{k^2-4}{k^2} = \frac{(k-2)(k+2)}{k \cdot k}.$$

Atunci

$$x_n = \frac{1\cdot 5}{3\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 6}{4\cdot 4} \cdot \frac{3\cdot 7}{5\cdot 5} \cdots \frac{(n-2)(n+2)}{n\cdot n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots n} \cdot \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdots(n+2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots n}.$$

În prima fracție se simplifică $3, 4, \ldots, n-2$ și rămâne $\dfrac{1\cdot 2}{(n-1)n}$. În a doua se simplifică $5, 6, \ldots, n$ și rămâne $\dfrac{(n+1)(n+2)}{3\cdot 4}$. Deci

$$x_n = \frac{2}{(n-1)n} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{12} = \frac{(n+1)(n+2)}{6n(n-1)}.$$

Evident $x_n > 0,\ (\forall)\, n \geq 3$. Pentru $n \geq 3$:

$$\frac{n+1}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2, \qquad \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \leq 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Deci

$$0 < x_n \leq \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{9},\ (\forall) n \geq 3.$$

Șirul este mărginit.

Exemplul 10. $x_0 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{3} + 2,\ n \geq 0$

Calculăm câțiva termeni: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{25}{9}$. Toți sunt în intervalul $(0,3)$. Demonstrăm prin inducție matematică propoziția

$$P(n):\ 0 < x_n < 3.$$

Verificare. $P(0)$: $0 < 1 < 3$, adevărat.
Pasul de inducție. Presupunem $P(n)$ adevărată, adică $0 < x_n < 3$, și demonstrăm $P(n+1)$: $0 < x_{n+1} < 3$.
Împărțim inegalitățile la 3 și adunăm 2:

$$0 < \frac{x_n}{3} < 1 \ \Rightarrow\ 2 < \frac{x_n}{3} + 2 < 3 \ \Rightarrow\ 2 < x_{n+1} < 3.$$

Deci $0 < x_{n+1} < 3$, adică $P(n+1)$ este adevărată.
Conform principiului inducției matematice, $0 < x_n < 3$, $(\forall) n \geq 0$. Șirul este mărginit.

Exemplul 11. $x_0 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n},\ n \geq 0$

Demonstrăm prin inducție matematică $P(n):\ 0 < x_n < 3$.
Verificare. $P(0)$: $0 < 1 < 3$, adevărat.
Pasul de inducție. Presupunem $0 < x_n < 3$. Adunăm 6:

$$6 < 6 + x_n < 9.$$

Funcția radical este strict crescătoare, deci

$$\sqrt{6} < \sqrt{6 + x_n} < \sqrt{9}, \quad \text{adică} \quad 0 < \sqrt{6} < x_{n+1} < 3.$$

Deci $P(n+1)$ este adevărată și, conform principiului inducției matematice, $0 < x_n < 3$, $(\forall) n \geq 0$.
Șirul este mărginit.

B. Șiruri nemărginite

Exemplul 12. $x_n = 2n^2 - 5,\ n \geq 1$

Șirul este minorat: $n^2 \geq 1$, deci $x_n \geq 2 - 5 = -3$, $(\forall) n \geq 1$.
Șirul nu este majorat. Fie $b > 0$ oarecare (dacă șirul ar avea un majorant negativ, atunci și 1 ar fi majorant, conform Observației 1). Pentru $n \geq 1$ avem $n^2 \geq n$, deci

$$x_n = 2n^2 - 5 \geq 2n - 5 \geq n - 5.$$

Alegem $n = [b] + 6$. Din $[b] > b - 1$ rezultă $n > b + 5$, adică $n - 5 > b$. Atunci

$$x_n \geq n - 5 > b.$$

Deci pentru orice $b > 0$ există un rang $n \geq 1$ cu $x_n > b$: șirul nu este majorat, deci este nemărginit.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 13. $x_n = -\dfrac{n^3}{n+1},\ n \geq 1$

Șirul este majorat: $x_n < 0,\ (\forall)\, n \geq 1$.
Șirul nu este minorat. Pentru $n \geq 1$ avem $n+1 \leq 2n$, deci

$$\frac{n^3}{n+1} \geq \frac{n^3}{2n} = \frac{n^2}{2} \geq \frac{n}{2} \quad \Rightarrow \quad x_n \leq -\frac{n}{2}, \quad (\forall)\, n \geq 1.$$

Fie $a < 0$ oarecare. Alegem $n = [-2a] + 1$; atunci $n > -2a$, adică $-\frac{n}{2} < a$. Rezultă

$$x_n \leq -\frac{n}{2} < a.$$

Deci șirul nu este minorat, așadar este nemărginit.

Exemplul 14. $x_n = (-2)^n,\ n \geq 0$

Avem $|x_n| = 2^n,\ (\forall)\, n \geq 0$. Din formula binomului lui Newton,

$$2^n = (1+1)^n = 1 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n \geq 1 + n > n.$$

Fie $M > 0$ oarecare. Alegem $n = [M] + 1 > M$. Atunci

$$|x_n| > n > M.$$

Conform consecinței Propoziției, șirul este nemărginit.

Observație. Termenii de rang par, $x_{2k} = 4^k$, arată că șirul nu este majorat, iar cei de rang impar, $x_{2k+1} = -2 \cdot 4^k$, arată că nu este nici minorat.

Exemplul 15. $x_n = \dfrac{3^n}{n},\ n \geq 1$

Evident $x_n > 0,\ (\forall)\, n \geq 1$, deci șirul este minorat. Pentru $n \geq 2$, din binomul lui Newton păstrăm primii trei termeni (ceilalți sunt pozitivi):

$$3^n = (1+2)^n \geq 1 + \mathrm{C}_n^1 \cdot 2 + \mathrm{C}_n^2 \cdot 2^2 = 1 + 2n + 2n(n-1) = 2n^2 + 1 > 2n^2.$$

Deci

$$x_n > \frac{2n^2}{n} = 2n > n,\ (\forall)\, n \geq 2.$$

Fie $b > 0$ oarecare. Alegem $n = [b] + 2$; atunci $n \geq 2$ și $n > b$, deci $x_n > n > b$.
Șirul nu este majorat, deci este nemărginit.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0