Prof. Micu Elena

Lecția 4
Șiruri mărginite
Analiză matematică – clasa a XI-a
Material teoretic

Material didactic.

Definiții

Fie $(x_n)_{n\geq n_0}$ un șir de numere reale ($n_0 \in \mathbb{N}$ este rangul primului termen).

- Șirul (x_n) este **mărginit superior** (**majorat**) dacă există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x_n \leq b, \quad (\forall)\, n \geq n_0.$$

  Numărul b se numește *majorant* al șirului.

- Șirul (x_n) este **mărginit inferior** (**minorat**) dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$a \leq x_n, \quad (\forall)\, n \geq n_0.$$

  Numărul a se numește *minorant* al șirului.

- Șirul (x_n) este **mărginit** dacă este și majorat, și minorat, adică există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$a \leq x_n \leq b, \quad (\forall)\, n \geq n_0.$$

  Altfel spus, toți termenii șirului se află în intervalul închis $[a, b]$.

- Un șir care nu este mărginit se numește **nemărginit**.

Observații

1) Dacă b este majorant, atunci orice număr $b' \geq b$ este tot majorant. Dacă a este minorant, atunci orice număr $a' \leq a$ este tot minorant. Un șir mărginit are, deci, o infinitate de majoranți și de minoranți.

2) Șirul (x_n) **nu este majorat** dacă pentru orice $b \in \mathbb{R}$ există cel puțin un rang $n \geq n_0$ astfel încât

$$x_n > b.$$

3) Șirul (x_n) **nu este minorat** dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există cel puțin un rang $n \geq n_0$ astfel încât

$$x_n < a.$$

4) Dacă (x_n) nu este majorat și $y_n \geq x_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci nici (y_n) nu este majorat.
Dacă (x_n) nu este minorat și $y_n \leq x_n$ pentru orice $n \geq n_0$, atunci nici (y_n) nu este minorat.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Propoziție

Șirul (x_n) este mărginit dacă și numai dacă există $M > 0$ astfel încât

$$|x_n| \leq M, \quad (\forall)\, n \geq n_0.$$

Demonstrație. „$\Rightarrow$” Dacă $a \leq x_n \leq b$ pentru orice $n \geq n_0$, luăm $M = \max(|a|, |b|) + 1 > 0$. Atunci

$$-M < a \leq x_n \leq b < M,$$

deci $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \geq n_0$.
„$\Leftarrow$” Din $|x_n| \leq M$ rezultă

$$-M \leq x_n \leq M, \quad (\forall)\, n \geq n_0,$$

deci șirul este mărginit, cu $a = -M$ și $b = M$. □

Consecință. Șirul (x_n) este nemărginit dacă pentru orice $M > 0$ există cel puțin un rang $n \geq n_0$ astfel încât $|x_n| > M$.

Metode de studiu a mărginirii

1) **Scrierea termenului general sub altă formă** (scoaterea întregilor dintr-o fracție, separarea cazurilor n par / n impar).
2) **Majorări și minorări directe** (de exemplu $2^n \leq 3^n$, $n+1 \leq 2n$ pentru $n \geq 1$).
3) **Amplificarea cu expresia conjugată**, folosind

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}, \qquad a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}.$$

4) **Restrângerea sumelor**: suma lui Gauss, suma unei progresii geometrice, descompunerea în fracții simple (sume telescopice).
5) **Restrângerea produselor** (produse telescopice).
6) **Inducția matematică**, pentru șiruri date prin relații de recurență.

Atenție

Pentru a arăta că un șir **nu** este majorat nu este suficient să observăm că „termenii cresc”. Trebuie ca, pentru un b *oarecare*, să indicăm efectiv un rang $n \geq n_0$ cu $x_n > b$. De regulă, rangul se alege cu ajutorul părții întregi: $[b]$ este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu b, deci

$$[b] \leq b < [b] + 1.$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0