Prof. Micu Elena

Lecția 5
Șiruri monotone
Analiză matematică – clasa a XI-a
Probleme rezolvate

Material didactic.

A. Șiruri date prin termenul general

Exemplul 1. $x_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$, $n \geq 0$

Aplicăm criteriul diferenței. Termenul de rang $n+1$ se obține înlocuind n cu $n+1$:

$$x_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} = \frac{2n+5}{n+2}.$$

Atunci

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{(2n+5)(n+1)-(2n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}.$$

Calculăm numărătorul:

$$(2n+5)(n+1)-(2n+3)(n+2) = (2n^2+7n+5)-(2n^2+7n+6) = -1.$$

Deci

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0, \quad (\forall)\, n \geq 0,$$

deoarece numitorul este pozitiv. Șirul este strict descrescător.

Exemplul 2. $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+3}$, $n \geq 0$

Aplicăm criteriul diferenței:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+3} - \frac{n^2}{n^2+3} = \frac{(n+1)^2(n^2+3) - n^2\big((n+1)^2+3\big)}{\big((n+1)^2+3\big)(n^2+3)}.$$

La numărător desfacem parantezele; termenii $(n+1)^2n^2$ se reduc:

$$(n+1)^2n^2 + 3(n+1)^2 - n^2(n+1)^2 - 3n^2 = 3\big((n+1)^2 - n^2\big) = 3(2n+1).$$

Deci

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(2n+1)}{\big((n+1)^2+3\big)(n^2+3)} > 0, \quad (\forall)\, n \geq 0.$$

Șirul este strict crescător.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 3. $x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1},\ n \geq 0$

Amplificăm cu expresia conjugată și folosim $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$x_n = \frac{(n+3)-(n+1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}.$$

Analog,

$$x_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}.$$

Funcția radical este strict crescătoare, deci $\sqrt{n+4} > \sqrt{n+3}$ și $\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$. Adunând,

$$\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2} > \sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}.$$

Două fracții cu același numărător pozitiv: cea cu numitorul mai mare este mai mică. Deci

$$x_{n+1} < x_n, \quad (\forall)\, n \geq 0,$$

iar șirul este strict descrescător.

Exemplul 4. $x_n = \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)},\ n \geq 1$

Toți termenii sunt pozitivi, deci putem aplica criteriul raportului. Termenul x_{n+1} are un factor în plus la numărător, $3(n+1)-2 = 3n+1$, și un factor în plus la numitor, $3(n+1) = 3n+3$:

$$x_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)(3n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)(3n+3)}.$$

Prin împărțire, toți factorii comuni se simplifică:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3n+1}{3n+3} < 1, \quad (\forall)\, n \geq 1,$$

deoarece $3n+1 < 3n+3$. Șirul este strict descrescător.

Exemplul 5. $x_n = \dfrac{4^n}{(n+1)!},\ n \geq 2$

Termenii sunt pozitivi. Folosim $(n+2)! = (n+1)! \cdot (n+2)$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{4^n} = \frac{4}{n+2}.$$

Pentru $n \geq 2$ avem $n+2 \geq 4$, deci

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4}{n+2} \leq 1, \quad (\forall)\, n \geq 2.$$

Șirul $(x_n)_{n\geq 2}$ este descrescător. Nu este strict descrescător, deoarece pentru $n = 2$ raportul este 1, adică $x_3 = x_2$. Pentru $n \geq 3$ avem $n+2 \geq 5$ și raportul este strict mai mic decât 1, deci șirul $(x_n)_{n\geq 3}$ este strict descrescător.

Observație. Pentru $n = 0$ și $n = 1$ raportul este 2, respectiv $\frac{4}{3}$, deci $x_0 < x_1 < x_2 = x_3 > x_4 > \ldots$: șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemonoton.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

Exemplul 6. $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{3n},\ n \geq 1$

Scriem cei doi termeni consecutivi:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n},$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3}.$$

La scădere, termenii comuni $\frac{1}{n+2}, \ldots, \frac{1}{3n}$ se reduc:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1}.$$

Dintre două fracții cu numărătorul 1, este mai mare cea cu numitorul mai mic, deci

$$\frac{1}{3n+1} > \frac{1}{3n+3} \quad \text{și} \quad \frac{1}{3n+2} > \frac{1}{3n+3}.$$

Atunci

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} > \frac{3}{3n+3} = \frac{1}{n+1},$$

adică $x_{n+1} - x_n > 0$, $(\forall)\, n \geq 1$. Șirul este strict crescător.

Exemplul 7. $x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1},\ n \geq 1$

Pentru n par, $x_n = \frac{n}{n+1} > 0$; pentru n impar, $x_n = -\frac{n}{n+1} < 0$. Atunci

$$x_1 = -\frac{1}{2} < 0, \qquad x_2 = \frac{2}{3} > 0, \qquad x_3 = -\frac{3}{4} < 0,$$

deci

$$x_1 < x_2 > x_3.$$

Diferențele $x_2 - x_1 > 0$ și $x_3 - x_2 < 0$ au semne contrare, așa că șirul este nemonoton (Observația 3). La fel, pentru orice $k \geq 1$, $x_{2k-1} < x_{2k} > x_{2k+1}$: șirul nu devine monoton nici de la un anumit rang.

B. Șiruri date prin relații de recurență

Exemplul 8. $x_0 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 3,\ n \geq 0$

Calculăm câțiva termeni: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{19}{4}$; ei cresc și rămân sub 6.
Pasul 1 (mărginirea). Demonstrăm prin inducție $P(n):\ x_n < 6$, $(\forall)\, n \geq 0$.
$P(0)$: $1 < 6$, adevărat. Presupunem $x_n < 6$; atunci

$$\frac{x_n}{2} < 3 \ \Rightarrow\ \frac{x_n}{2} + 3 < 6 \ \Rightarrow\ x_{n+1} < 6,$$

deci $P(n+1)$ este adevărată. Conform principiului inducției matematice, $x_n < 6$, $(\forall)\, n \geq 0$.
Pasul 2 (monotonia). Aplicăm criteriul diferenței:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + 3 - x_n = 3 - \frac{x_n}{2} = \frac{6 - x_n}{2} > 0, \quad (\forall)\, n \geq 0,$$

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0

deoarece $x_n < 6$. Șirul este strict crescător.

Exemplul 9. $x_0 = 3,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2},\ n \geq 0$

Calculăm $x_1 = \sqrt{5} < 3 = x_0$. Demonstrăm prin inducție

$$P(n):\ x_{n+1} < x_n, \quad (\forall)\, n \geq 0.$$

Verificare. $P(0)$: $x_1 = \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3 = x_0$, adevărat.
Pasul de inducție. Presupunem $x_{n+1} < x_n$ și demonstrăm $x_{n+2} < x_{n+1}$. Adunăm 2:

$$x_{n+1} + 2 < x_n + 2.$$

Funcția radical este strict crescătoare, deci

$$\sqrt{x_{n+1} + 2} < \sqrt{x_n + 2}, \quad \text{adică} \quad x_{n+2} < x_{n+1}.$$

Conform principiului inducției matematice, $x_{n+1} < x_n$, $(\forall)\, n \geq 0$: șirul este strict descrescător.

Exemplul 10. $x_0 = \dfrac{1}{2},\ x_{n+1} = x_n^2,\ n \geq 0$

Pasul 1. Demonstrăm prin inducție $P(n):\ 0 < x_n < 1$, $(\forall)\, n \geq 0$.
$P(0)$: $0 < \frac{1}{2} < 1$, adevărat. Dacă $0 < x_n < 1$, înmulțim inegalitatea $x_n < 1$ cu numărul pozitiv x_n:

$$0 < x_n^2 < x_n < 1, \quad \text{deci} \quad 0 < x_{n+1} < 1.$$

Pasul 2. Criteriul diferenței:

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n = x_n(x_n - 1).$$

Avem $x_n > 0$ și $x_n - 1 < 0$, deci produsul este negativ:

$$x_{n+1} - x_n < 0, \quad (\forall)\, n \geq 0.$$

Șirul este strict descrescător.

Exemplul 11. $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_{n+1} = 4x_n - 3x_{n-1},\ n \geq 1$

Scădem x_n din ambii membri ai relației de recurență:

$$x_{n+1} - x_n = 3x_n - 3x_{n-1} = 3(x_n - x_{n-1}), \quad (\forall)\, n \geq 1.$$

Aplicând succesiv această relație,

$$x_{n+1} - x_n = 3(x_n - x_{n-1}) = 3^2(x_{n-1} - x_{n-2}) = \cdots = 3^n(x_1 - x_0) = 3^n.$$

Deci

$$x_{n+1} - x_n = 3^n > 0, \quad (\forall)\, n \geq 0,$$

iar șirul este strict crescător.

© 2026 Micu Elena · mateexamene.ro
Licență CC BY-NC-ND 4.0